

KETAKSTABILAN GELOMBANG PANJANG BAGI OLAKAN MANTAP
DENARD - MARANGONI DENGAN BATAS BAWAH BERTEBAT

FAZLINA BT AMAN



PTTAUTHM
PERPUSTAKAAN TUNKU TUN AMINAH

UNIVERSITI KEBANGSAAN MALAYSIA

PERPUSTAKAAN KUI TTHO




3 0000 00076305 6



PTTA UTHM
PERPUSTAKAAN TUNKU TUN AMINAH

**KETAKSTABILAN GELOMBANG PANJANG BAGI OLAKAN MANTAP
BENARD-MARANGONI DENGAN BATAS BAWAH BERTEBAT**

FAZLINA BT AMAN



PTTA UTHM
PERPUSTAKAAN TUNKU TUN AMINAH

**PROJEK PENYELIDIKAN YANG DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI
SEBAHAGIAN DARIPADA SYARAT MEMPEROLEH IJAZAH SARJANA
SAINS**

**PUSAT PENGAJIAN SAINS MATEMATIK
UNIVERSITI KEBANGSAAN MALAYSIA
BANGI**

2003

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang tiap-tiap satunya telah saya jelaskan sumbernya.

10 Oktober 2003

Fazlina bt Aman
P23742



PENGHARGAAN

Alhamdulillah, bersyukur saya ke hadrat Ilahi kerana dengan izinNya dapat saya menyiapkan projek penyelidikan ini. Setinggi-tinggi penghargaan dan ucapan terima kasih khas ditujukan kepada Prof. Madya Dr. Ishak Hashim selaku penyelia saya yang telah banyak membantu dan membimbing saya dari awal hingga ke akhir penyiapan projek ini.

Terima kasih kepada semua pensyarah Pusat Pengajian Sains Matematik di atas ilmu yang telah diberikan. Terima kasih juga kepada KUiTTTHO di atas pembiayaan pengajian saya di sini.

Sekalung penghargaan kepada kedua ibu bapa saya, Puan Maimon Abd. Karim dan Encik Aman bin Simin serta tunang saya yang banyak memberikan sokongan dan dorongan sepanjang saya berada di UKM.

Ucapan terima kasih juga saya tujukan kepada rakan-rakan yang banyak membantu dalam penyiapan projek ini seperti Wartono, Adyda, Raziana, Mea, Nazran dan Najib serta rakan-rakan lain yang banyak memberikan dorongan dan galakan.

Akhir kata, saya mengucapkan terima kasih kepada sesiapa yang terlibat sama ada secara langsung atau tidak langsung dalam menyempurnakan projek ini.

ABSTRAK

Permulaan olakan mantap Bénard-Marangoni dalam selapisan bendalir mengufuk dengan sempadan bawah yang bertebat dan tegar serta permukaan atasnya bebas tercangga dikaji secara analisis berdasarkan teori kestabilan linear klasik. Persamaan linear bagi model olakan diselesaikan dengan menggunakan kaedah usikan. Kami memperoleh ungkapan beranalisis bagi nombor tak berdimensi Rayleigh pada peringkat utama dan pada peringkat pertama. Penebatan lapisan bendalir di sempadan bawah mempengaruhi ketakstabilan gelombang panjang.



ABSTRACT

The onset of steady Bénard-Marangoni convection in a horizontal layer of fluid with rigid and insulating lower boundary and a deformable free upper surface is studied using analytical techniques by means of classical linear stability theory. The linear model equations are solved using a perturbation methods. We obtain an analytical expression for the non-dimensional Rayleigh number at leading and first orders. An insulating lower boundary influences the instability of a long wave.



KANDUNGAN

PENGAKUAN	ii
PENGHARGAAN	iii
ABSTRAK	iv
ABSTRACT	v
KANDUNGAN	vi
SENARAI JADUAL	viii
SENARAI RAJAH	ix
SENARAI SIMBOL	x
BAB I PENGENALAN	1
1.1 Olakan dan kepentingannya	1
1.2 Olakan haba dalam lapisan bendalir	2
1.2.1 Olakan berpunca daripada daya keapungan	2
1.2.2 Olakan berpunca daripada daya tegangan permukaan	3
1.3 Kajian eksperimen terdahulu	4
1.3.1 Eksperimen Bénard	4
1.3.2 Eksperimen Block	5
1.3.3 Kajian-kajian berkaitan	5
1.3.4 Kajian berkenaan olakan Bénard-Marangoni	6
BAB II MODEL MASALAH KESTABILAN	10
2.1 Pemodelan masalah linear	10
2.2 Persamaan menakluk	12
2.2.1 Persamaan keselantaran	12
2.2.2 Persamaan momentum	12
2.2.3 Persamaan tenaga	13
2.3 Pelinearan masalah	13
2.3.1 Persamaan momentum	14
2.3.2 Persamaan tenaga	14
2.4 Syarat-syarat sempadan	15
2.4.1 Pada $z = 0$	15
2.4.2 Pada $z = 1$	15
2.5 Analisis pada mod normal	19
2.5.1 Persamaan momentum	20
2.5.2 Persamaan tenaga	21
2.5.3 Syarat sempadan	21

	vii
BAB III KEPUTUSAN DAN PERBINCANGAN	24
3.1 Penyelesaian masalah kestabilan	24
3.2 Penyelesaian masalah terlinear	25
BAB IV KESIMPULAN DAN KAJIAN LANJUTAN	30
4.1 Kesimpulan	30
4.2 Kajian lanjutan	31
RUJUKAN	32



SENARAI JADUAL

2.1	Kuantiti-kuantiti tak berdimensi.	20
3.1	Nilai pengiraan secara beranalisis bagi R_0 daripada persamaan (3.25) untuk beberapa nilai $P_r G$	27
3.2	Nilai pengiraan secara beranalisis bagi R_1 daripada persamaan (3.39) untuk beberapa nilai Γ dan B_i	29



SENARAI RAJAH

1.1	Lakaran bagi pergerakan sel hasil daripada daya keapungan.	3
1.2	Mekanisma asas bagi olakan termokapilari tanpa canggaan permukaan.	4
2.1	Model fizikal.	11



SENARAI SIMBOL

a	nombor gelombang
B_i	nombor Biot
B_o	nombor Bond
C_r	nombor Crispation
d	ketebalan bendalir
f	pemesongan pada permukaan atas bendalir
g	pecutan graviti
G	nombor Galileo
h	pekali pemindahan haba
k	nombor gelombang mengufuk
M	nombor Marangoni
P_r	nombor Prandtl
p	tekanan
p_a	tekanan malar
R	nombor Rayleigh
s	kadar pertumbuhan berkaitan dengan masa
t	masa
$T(z)$	variasi suhu usikan menegak
T_r	taburan suhu
T_H	suhu pada permukaan bawah
T_C	suhu pada permukaan atas
T_∞	suhu malar
u	halaju bendalir
w	komponen- z bagi halaju
$W(z)$	variasi halaju usikan menegak
x, y, z	ruang koordinat kartesian

Simbol Greek

- β kecerunan suhu
- γ pekali variasi pengembangan terma
- κ resapan terma bendalir
- ν kelikatan kinematik bendalir
- ρ ketumpatan bendalir
- ρ_0 nilai ketumpatan bendalir pada suhu rujukan
- τ ketegangan permukaan
- τ_0 ketegangan permukaan pada suhu rujukan yang sesuai
- δ canggaan permukaan
- α pekali kembangan isipadu
- θ magnitud gangguan bagi suhu
- μ kelikatan bendalir
- χ konduktif terma bendalir

Subskrip

- c keadaan kritikal
- o kuantiti rujukan



BAB I

PENGENALAN

1.1 Olakan dan kepentingannya

Olakan merupakan suatu fenomena yang penting dalam kehidupan seharian. Perhatikan wap yang kelihatan daripada makanan yang baru sahaja dimasak, pembentukan awan dan juga arus aliran udara di atas permukaan jalan yang kelihatan bercahaya apabila cuaca panas, merupakan contoh-contoh bagi olakan yang sering berlaku tanpa kita sedari. Menurut Velarde & Normand (1980), dalam bidang meteorologi, olakan dirujuk sebagai pergerakan atmosfera pada arah menegak. Dalam bidang industri komersial pula, olakan dalam bendalir diaplikasikan dalam pertumbuhan kristal dan kimpalan keluli. Sementara itu, terdapat juga olakan yang sukar diperhatikan seperti olakan yang berlaku dalam mantel bumi iaitu migrasi perlahan kontinen-kontinen.

Penerangan yang paling mudah bagi olakan yang diberikan oleh Velarde & Normand (1980) ialah kenaikan haba. Sementara kes yang termudah bagi olakan adalah apabila suatu bendalir (sama ada gas atau cecair) dipanaskan daripada bawah. Tindak balas bagi pemanasan ini akan menyebabkan bendalir tersebut mengembang dan menjadi kurang tumpat. Maka lapisan bawah yang panas dan lebih ringan akan cenderung untuk naik ke atas, manakala lapisan atas yang lebih sejuk akan tertolak ke bawah. Olakan ini telah lama diketahui sejak kurun ke-18.

Secara amnya, menurut Koschmieder (1993) olakan ialah pergerakan bendalir yang disebabkan oleh perbezaan suhu dengan kecerunan suhu pada mana-mana arah. Terdapat dua jenis olakan iaitu olakan bebas atau semula jadi dan olakan paksa. Olakan bebas adalah pergerakan bendalir yang disebabkan oleh medan daya luaran seperti graviti yang bertindak ke atas kecerunan ketumpatan yang dirangsang oleh proses pemindahan haba itu sendiri. Sementara olakan paksa ialah pergerakan bendalir yang dirangsang oleh faktor luaran seperti pengepam atau kipas.

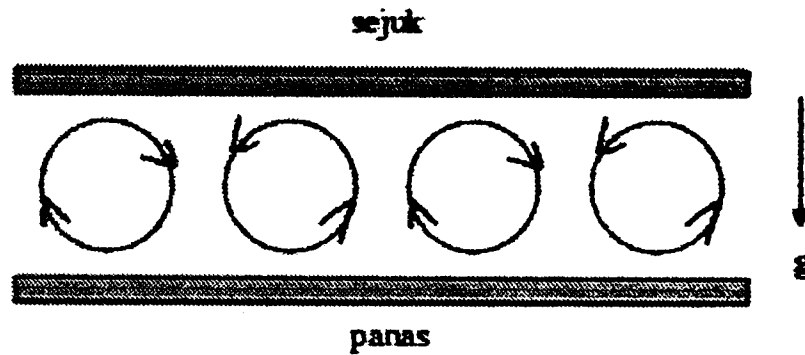
1.2 Olakan haba dalam lapisan bendalir

Olakan dalam lapisan bendalir yang dipanaskan daripada bawah dan tertakluk kepada kecerunan suhu menegak yang seragam, dihasilkan oleh dua jenis mekanisme yang berbeza iaitu daya keapungan dan daya tegangan permukaan.

1.2.1 Olakan berpunca daripada daya keapungan

Olakan yang terhasil daripada daya keapungan dikenali juga sebagai olakan Bénard. Mekanisma bagi olakan ini adalah seperti berikut: Pertimbangkan suatu lapisan bendalir likat mengufuk pada keadaan rehat yang dibatasi oleh dua plat konduktor haba dan dipanaskan dari bawah (atau disejukkan dari atas). Andaikan terdapat suatu usikan kecil dalam suhu yang menghasilkan satu titik panas berdekatan plat bawah.

Pada kebiasaannya, bendalir mempunyai pekali kembangan haba yang positif. Maka elemen bendalir yang lebih panas akan mengembang secara relatif terhadap bendalir berdekatannya. Didapati perbezaan tekanan di antara elemen bendalir di bawah dan di atas melebihi beratnya, lalu menyebabkan ia bergerak ke atas disebabkan oleh daya keapungan. Bendalir dari bawah akan mengisi kekosongan yang ditinggalkan oleh bendalir yang bergerak ke atas tadi. Seterusnya, bendalir yang bergerak ke atas tadi akan menyejuk dan akhirnya bergerak semula ke bawah



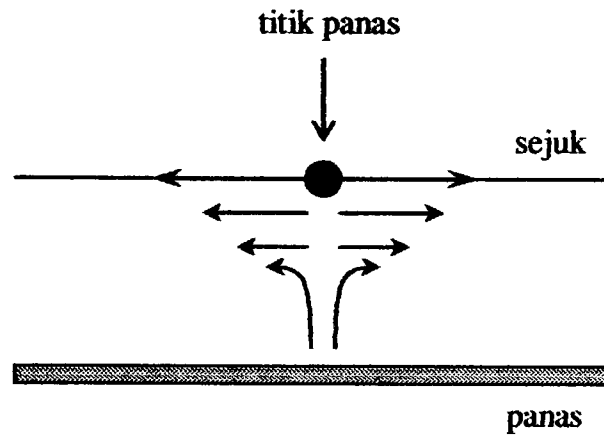
RAJAH 1.1 Lakaran bagi pergerakan sel hasil daripada daya keapungan.

seperti yang digambarkan dalam Rajah 1.1. Proses olakan akan berterusan selagi suhu di antara permukaan bawah dan permukaan atas adalah cukup besar.

1.2.2 Olakan berpunca daripada daya tegangan permukaan

Olakan boleh juga berlaku disebabkan oleh daya tegangan permukaan atau daya termokapilari seperti mana olakan terhasil daripada daya keapungan. Olakan ini dikenali juga sebagai olakan Marangoni. Menurut Velarde & Normand (1980) tegangan permukaan adalah daya padu yang kesannya ialah untuk meminimumkan kawasan permukaan bendalir. Selain itu, tekanan permukaan juga bertindak sebagai daya dorongan dalam aliran olakan kerana tegangan berubah-ubah mengikut suhu. Seperti ketumpatan, Velarde & Normand (1980) mendapati tegangan permukaan akan berkurang apabila suhu bertambah. Andaikan suatu titik panas telah bergerak ke permukaan disebabkan oleh ketakseragaman suhu. Penghasilan kecerunan daya tegangan permukaan akan mendorong bendalir bergerak dari kawasan panas (daya tegangan permukaan yang rendah) ke kawasan sejuk (daya tegangan permukaan yang tinggi) seperti yang digambarkan dalam Rajah 1.2.

Oleh itu, sebarang perubahan suhu yang terhasil merentasi permukaan bendalir akan disertai oleh perubahan dalam tegangan permukaan. Kawasan yang lebih sejuk akan mempamerkan tegangan permukaan yang tinggi, manakala pada kawasan yang lebih panas, tegangan akan berkurangan. Jika perubahan tegangan permukaan membawa kepada ketakseimbangan daya, maka suatu aliran akan ter-



RAJAH 1.2 Mekanisma asas bagi olakan termokapilari tanpa canggaan permukaan.

hasil. Oleh itu, olakan termokapilari adalah berpunca daripada kecerunan suhu pada permukaan bebas bendalir yang disebabkan oleh kebersandaran daya tegangan permukaan terhadap suhu.

1.3 Kajian eksperimen terdahulu

1.3.1 Eksperimen Bénard

Masalah bagi permulaan ketakstabilan olakan dalam lapisan bendalir mengufuk yang dipanaskan dari bawah adalah berpunca dari pemerhatian secara eksperimen oleh Bénard. Menurut Koschmieder (1993), eksperimen yang dijalankan oleh Bénard melibatkan lapisan bendalir yang sangat tipis iaitu lebih kurang satu milimeter dalamnya. Permukaan atas adalah bebas dan mempunyai suhu yang lebih rendah berbanding suhu pada permukaan bawah kerana penyejukan oleh udara yang tidak seragam. Beberapa jenis cecair dengan kelikatan yang berbeza telah digunakan. Bénard mendapati dalam kesemua kes, apabila suhu permukaan bawah meningkat, lapisan bendalir mengalami retikulasi dan terbahagi kepada sel-sel berbentuk heksagon yang stabil dan tetap. Sementara itu, Bénard percaya bahawa agen yang menyebabkan ketakstabilan berlaku adalah hasil daripada daya keapungan oleh pengembangan bendalir yang dipanaskan itu. Walau bagaimanapun, kajian oleh Block (1956), Pearson (1958) dan Nield (1964) menunjukkan ba-

hawa selain daripada daya keapungan, sel-sel Bénard sebenarnya lebih dirangsang oleh kecerunan daya tegangan permukaan yang terhasil daripada variasi suhu yang merentasi permukaan bebas.

1.3.2 Eksperimen Block

Pada tahun 1956, Block telah menjalankan eksperimen bagi mengenalpasti punca bagi pembentukan sel-sel heksagon dalam eksperimen Bénard. Pemerhatian Block (1956) menunjukkan bahawa apabila lapisan tipis yang mengalami olakan dilitupi oleh lapisan tipis silikon yang merebak, didapati aliran dalam bendalir akan terhenti. Beliau menyimpulkan fenomena ini disebabkan oleh kesan termokapilari atau daya tegangan permukaan pada permukaan atas yang bebas dan bukannya daya keapungan.

1.3.3 Kajian-kajian berkaitan

Ahli teori terunggul berkenaan olakan pada awal kurun ke-20 sebenarnya ialah Lord Rayleigh. Antara kertas kerjanya yang terakhir ialah artikel mengenai olakan yang diterbitkan pada tahun 1916 yang cuba menghuraikan hasil eksperimen Bénard. Walaupun kini telah diketahui bahawa teori Rayleigh tidak boleh diaplikasikan kepada sistem yang dikaji oleh Bénard, namun kertas kerjanya telah menjadi titik permulaan bagi hampir semua teori moden olakan. Pearson (1958) telah memperkenalkan teori yang lebih tepat bagi olakan yang diperhatikan oleh Bénard iaitu ia disebabkan oleh daya tegangan permukaan. Beliau menunjukkan bahawa daya termokapilari pada permukaan bebas yang disebabkan oleh variasi bagi tegangan permukaan dan suhu menyebabkan olakan mantap (Marangoni) berlaku dalam lapisan bendalir yang dipanaskan dari bawah dengan nombor Marangoni, M yang melebihi nilai kritikal.

1.3.4 Kajian berkenaan olakan Bénard-Marangoni

Dalam kebanyakan situasi fizikal, olakan sebenarnya berlaku disebabkan oleh gabungan daya keapungan dan daya tegangan permukaan. Sehubungan dengan itu, Nield (1964) telah meneruskan kajian yang dibuat oleh Pearson (1958) dengan memasukkan kesan daya keapungan. Beliau mengkaji permulaan olakan mantap Bénard-Marangoni pada suatu lapisan bendalir mengufuk tanpa melibatkan canggaan permukaan bebas yang dipanaskan dari bawah dan tertakluk kepada kecerunan suhu mencancang. Nield (1964) mendapati bahawa kedua-dua mekanisma ketakstabilan saling meneguhkan di antara satu sama lain. Beliau menunjukkan bahawa gabungan antara kedua-dua mekanisma ketakstabilan itu adalah kuat apabila nombor Biot iaitu $B_i = 0$, tetapi lemah apabila B_i meningkat.

Seterusnya, setelah melakukan kajian berangka secara intensif, Takashima (1970) menyimpulkan bahawa adalah mustahil olakan Bénard-Marangoni berayun berlaku dalam lapisan bendalir yang dipanaskan dari bawah dengan permukaan bebas tanpa canggaan. Davis & Homsy (1980) pula meneruskan kajian oleh Nield (1964) dengan memasukkan kesan percanggaan permukaan bebas. Kajian Davis & Homsy (1980) ini mengkhusus kepada kajian bagi permulaan olakan Bénard-Marangoni bagi had $C_r \rightarrow 0$ dengan mendapatkan penyelesaian bagi R_c , M_c dan a_c sebagai siri asimptotik biasa dalam kuasa $C_r \ll 1$ seperti berikut,

$$R_c = R_0 + R_1 C_r + O(C_r^2),$$

$$M_c = M_0 + M_1 C_r + O(C_r^2),$$

$$a_c = a_0 + a_1 C_r + O(C_r^2),$$

dengan C_r , R_c , M_c dan a_c masing-masing adalah nombor Crispation, nombor Rayleigh kritikal, nombor Marangoni kritikal dan nombor gelombang kritikal. Ungkapan yang diperoleh oleh Davis & Homsy (1980) merupakan penyelesaian bagi masalah tersebut apabila $C_r = 0$, yang sebenarnya telah diperolehi oleh Nield (1964) sebelum ini.

Pengiraan bagi ungkapan peringkat utama yang dilakukan oleh Davis &

Homsy (1980) adalah dalam kembangan R_c untuk suatu julat nilai M bagi kes nombor Bond iaitu $B_o = 0$ dan $B_i = 0$. Nilai-nilai ini kemudiannya disemak dan diperbetulkan oleh Wilson (1993) yang mana nilai pengiraan berangka bagi R_1 oleh Wilson (1993) adalah fungsi bagi M bagi kes $B_o = 0$ dan $B_i = 0$.

Nombor Rayleigh R dan nombor Marangoni M bagi semua kajian terdahulu yang menghuraikan kesan daya keapungan dan daya tegangan permukaan diambil sebagai saling tak bersandar. Walau bagaimanapun, dalam eksperimen fizikal yang biasa, parameter kawalan adalah perbezaan suhu yang merentasi lapisan yang wujud secara linear dalam kedua-dua R dan M . Oleh itu, kajian terkini lebih memfokus kepada kes pasangan fizikal yang berkaitan yang mana hubungan di antara R dan M adalah $M = \Gamma R$ dengan $\Gamma = \gamma/\rho_0 g \alpha d^2$ merupakan suatu pemalar.

Seterusnya, Benguria & Depassier (1989) mengkaji permulaan olakan Bénard-Marangoni secara berangka dalam lapisan planar yang dipanaskan dari bawah bagi kes $C_r = \infty$ (tercangga dengan kuat), $P_r = 1$, $B_i = 0$ dan $B_o = GP_r C_r$ dengan G dan P_r masing-masing ialah nombor Galileo dan nombor Prandtl. Benguria dan Depassier (1989) merupakan pengkaji pertama yang menunjukkan olakan berayun boleh berlaku apabila $\Gamma > 0$ jika termokapilari adalah kuat dan permukaan bebas tercangga. Pada masa yang sama, Perez-Garcia & Carneiro (1991) turut mempertimbangkan masalah olakan Bénard-Marangoni secara berangka bagi kes $P_r = 1$, $B_o = 0.1$ dan $B_i = 0$. Perez-Garcia & Carneiro (1991) memperoleh keadaan di mana persaingan diantara olakan mantap dan berayun, dan antara dua mod berayun boleh berlaku apabila $\Gamma < 0$.

Dalam kajian-kajian terkini, kesan-kesan fizikal yang lain telah dimasukkan di dalam kajian tentang permulaan olakan dalam lapisan plana mengufuk. Sebagai contoh, penjelasan tepat secara beranalisis bagi M untuk permulaan olakan mantap Marangoni dengan kelikatan suhu bersandar telah diperolehi oleh Kozhoukharova *et al.* (1995). Sementara itu, Selak & Lebon (1995) telah mengkaji permulaan olakan mantap Bénard-Marangoni dengan kehadiran kelikatan yang berubah terhadap suhu. Berikutnya, Char & Chiang (1994) mengkaji kesan pen-

janaan haba dalaman yang seragam pada permulaan olakan mantap Bénard-Marangoni. Terkini, Wilson (1997) telah memperolehi penjelasan yang tepat secara beranalisis untuk M bagi permulaan olakan mantap Marangoni dengan kehadiran pemanasan dalaman. Char & Chiang (1994) pula mendapati kesan menambahkan penjanaan haba dalaman adalah untuk mentakstabilkan lapisan. Antara kajian terkini berkenaan olakan Bénard-Marangoni ialah oleh Hashim & Wilson (1999) yang buat pertama kalinya telah menghuraikan secara lengkap lengkung sut kestabilan bagi kedua-dua olakan mantap dan olakan berayun dengan menggunakan kaedah berangka dan beranalisis.

Kajian berkenaan penebatan lapisan bendalir telah dilakukan oleh Gouesbet *et al.* (1990). Beliau mengkaji mod tak stabil dan perubahan kestabilan bagi ketakstabilan hasil dari tegangan permukaan dan keapungan pada suatu lapisan bendalir mengufuk untuk kes permukaan bebas bertebat dan untuk kes permukaan bebas berkonduksi. Kesan yang dapat dilihat dalam kes penebatan ialah hilangnya garis-garis tak berkesinambungan pada graf mod tak stabil untuk nombor Rayleigh pada nombor gelombang kritikal, a_c . Gouesbet *et al.* (1990) mendapati keapungan menghalang daripada berlakunya mod tak stabil, manakala permulaan bagi mod tak stabil akan membawa kepada pergerakan berayun. Clever & Busse (1995) pula mengkaji olakan mantap yang berputar dan ketakstabilan olakan dalam lapisan bendalir yang dipanaskan dari bawah untuk kes sempadan bawah yang tegar dan berkonduksi tinggi manakala permukaan atas adalah bebas dan hampir bertebat. Clever & Busse (1995) mendapati terdapat ketakstabilan baru iaitu ketakstabilan varicose subharmonik yang dihadkan pada kawasan berputar yang stabil terhadap nombor Rayleigh tinggi dalam kes nombor Prandtl sederhana. Clever & Busse (1995) berpendapat kombinasi sempadan bawah yang tegar dan bertebat, dan sempadan atas bebas tegangan atau tegar dan berkonduksi sempurna sepatutnya menghasilkan keputusan yang sama. Selain itu, Priede & Gunter (1997) mengkaji kesan penebatan sempadan bawah bagi kestabilan olakan termokapilari pada nombor Prandtl rendah. Beliau mendapati untuk kes batas bawah yang bertebat, nombor gelombang kritikal berskala $a_c \sim P_r^{1/2}$ yang membawa maksud

kebanyakan gelombang tak stabil dipertimbangkan sebagai lebih panjang daripada kedalaman lapisan bendalir dan nombor gelombang kritikal bergantung pada nombor Biot, $a_c \sim B_i^{1/2}$.

Kajian ini merupakan lanjutan daripada kajian yang dilakukan oleh Benguria & Depassier (1989) dan Hashim (1998). Benguria & Depassier (1989) mengkaji olakan Bénard-Marangoni pada bendalir mengufuk yang berkonduktor haba dan tegar atau bebas tegasan dibawahnya, manakala permukaan atas adalah bebas bersentuh dengan udara. Kajian yang dilakukan oleh Benguria & Depassier (1989) adalah secara berangka bagi menunjukkan terdapat ketakstabilan berayun yang berlaku pada nilai nombor Rayleigh yang rendah daripada nombor Rayleigh kritikal pada permulaan olakan mantap. Sementara itu, Hashim (1998) mengkaji olakan Bénard-Marangoni secara berangka dan beranalisis pada suatu lapisan bendalir yang berkonduktor haba dan tegar pada sempadan bawah, manakala sempadan atasnya bebas bersentuh dengan udara. Kajian Hashim (1998) menghu-
raikan secara lengkap lengkung sut bagi kedua-dua permulaan olakan mantap dan berayun. Dalam kajian ini, kami akan menggunakan teori kestabilan linear klasik untuk mengkaji permulaan olakan mantap Bénard-Marangoni pada suatu lapisan mengufuk bendalir yang bertebat dan tegar di bawahnya bagi kes R dan M yang saling bersandar secara linear. Kaedah secara beranalisis digunakan untuk mendapatkan nilai R_0 dan R_1 serta penjelasannya untuk lengkung sut mantap bagi permulaan olakan ini.

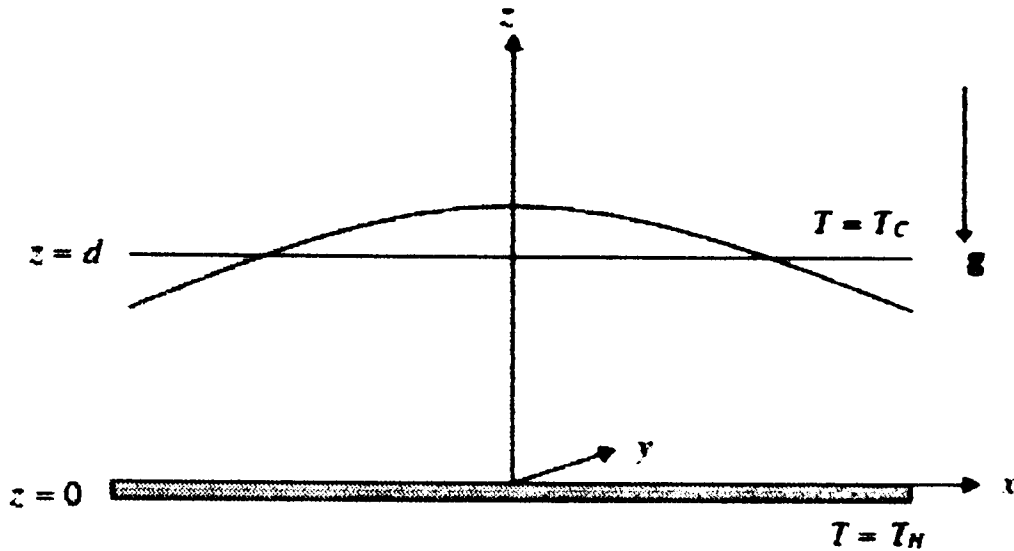
BAB II

MODEL MASALAH KESTABILAN

Bab ini memperihalkan satu model asas yang boleh digunakan untuk mengkaji permulaan olakan Bénard-Marangoni pada lapisan planar yang mengufuk bagi bendalir yang bertebat di bawahnya untuk kes R dan M yang bersandar secara linear. Teori kestabilan linear klasik digunakan untuk mengkaji kestabilan bagi model yang dipertimbangkan. Selain daripada itu, kaedah secara analisis digunakan untuk mendapatkan huraian lengkap bagi lengkung sut untuk olakan mantap ini.

2.1 Pemodelan masalah linear

Pertimbangkan satu lapisan bendalir mengufuk yang tak terhingga panjang dengan ketebalan d yang bertebat di bawahnya dalam keadaan tanpa gangguan. Ambil x dan y sebagai koordinat ruang dalam satah bagi sempadan bawah yang tegar dan z sebagai paksi menegak seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 2.1. Permukaan atas lapisan adalah bebas bersentuh dengan udara pada tekanan malar p_a dan suhu malar T_∞ . Apabila berlaku pergerakan bendalir, permukaan bebas tadi akan tercangga dan kedudukan ini diwakili oleh hubungan $z = d + \delta(x, y, t)$ dengan $\delta(x, y, t)$ adalah canggaaan awal pada permukaan yang tidak diketahui terhadap ketebalan d . Permukaan tercangga ini tertakluk kepada tegangan permukaan τ



RAJAH 2.1 Model fizikal.

yang bersandar kepada suhu T , iaitu

$$\tau = \tau_0 - \gamma(T - T_0), \quad (2.1)$$

dengan τ adalah tegangan permukaan pada keadaan tanpa gangguan, pemalar τ_0 adalah nilai τ pada suhu rujukan T_0 dan pemalar γ adalah kadar perubahan tegangan permukaan terhadap suhu.

Sementara itu, ketumpatan bendalir, ρ , diberi oleh

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)], \quad (2.2)$$

yang ρ_0 adalah nilai ketumpatan pada suhu rujukan T_0 dan $\alpha > 0$ adalah pekali bagi kembangan isipadu. Asas bagi penghampiran Boussinesq adalah semua sifat bendalir diandaikan malar kecuali ketumpatan bendalir yang bersandar secara linear kepada suhu. Pada keadaan rujukan, bendalir berada dalam keadaan rehat dan suhu yang disebarkan adalah melalui penebatan. Taburan suhu T_r , diberi oleh

$$T_r = T_H - \beta z, \quad (2.3)$$

dengan T_H adalah suhu pada permukaan bawah yang panas, $\beta = \Delta T/d > 0$ adalah suatu pemalar dan $\Delta T = T_H - T_C$ dengan T_C adalah suhu pada permukaan atas yang sejuk.

2.2 Persamaan menakluk

Pertimbangkan satu lapisan bendalir yang mempunyai ketebalan d , ditebat dari bawah dalam keadaan sempadan bawah yang tegar. Manakala, sempadan atas bebas bersentuh dengan udara pada tekanan malar dan suhu malar. Maka, dengan menggunakan penghampiran Boussinesq, kami akan mendapatkan persamaan menakluk bagi model ini.

2.2.1 Persamaan keselantaran

Menurut Anderson (1995), persamaan keselantaran diberi oleh

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

dengan $\mathbf{u} = [u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)]$ adalah halaju bendalir. Oleh kerana perubahan ρ adalah sangat sedikit dan bendalir adalah mantap (tidak bersandar terhadap masa) maka $\partial \rho / \partial t = 0$, diperolehi

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.4)$$

2.2.2 Persamaan momentum

Persamaan momentum oleh Anderson (1995), adalah seperti berikut

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} &= -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}. \end{aligned}$$

dengan ν adalah kelikatan kinematik bendalir. Oleh kerana $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ dari persamaan (2.4), maka

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}. \quad (2.5)$$

2.2.3 Persamaan tenaga

Merujuk Anderson (1995), persamaan tenaga secara ringkasnya boleh ditulis seperti berikut

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T, \quad (2.6)$$

yang κ adalah resapan terma bendalir. Pada keadaan rehat dan tanpa gangguan, $\mathbf{u} = 0$ dan $T_r = T(z)$. Suhu $T(z)$, mesti memenuhi persamaan (2.6), supaya

$$\kappa \frac{d^2 T(z)}{dz^2} = 0, \quad (2.7)$$

dan daripada persamaan ini, persamaan (2.3) akan diperolehi. Sejajar dengan itu,

$$\rho(z) = \rho_0 [1 - \alpha(T(z) - T_0)], \quad (2.8)$$

dan daripada persamaan (2.5), dengan $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, diperolehi

$$-\frac{dp(z)}{dz} - \rho(z)g = 0. \quad (2.9)$$

2.3 Pelinearan masalah

Andaikan sistem persamaan menakluk mengalami gangguan kecil dengan mengamb

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1, \quad (2.10)$$

$$p = p(z) + \delta p, \quad (2.11)$$

$$\rho = \rho(z) + \delta \rho, \quad (2.12)$$

$$T = T(z) + \theta. \quad (2.13)$$

yang δp , $\delta \rho$ dan θ masing-masing ialah canggaan permukaan bagi tekanan, canggaan permukaan bagi ketumpatan bendalir dan magnitud gangguan bagi suhu.

Dalam bahagian seterusnya, kami akan terbitkan persamaan linear bagi model olakan.

2.3.1 Persamaan momentum

Penggantian persamaan (2.10) - (2.13) ke dalam persamaan (2.5), memberikan

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} &= -\nabla \delta p + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{u}_1 + \delta \rho \mathbf{g}, \\ \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} &= -\frac{\nabla \delta p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_1 + \frac{\delta \rho}{\rho} \mathbf{g}, \\ \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} &= \nu \nabla^2 \mathbf{u}_1 - \alpha \theta \mathbf{g}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \mathbf{u}_1 &= -\alpha \theta \mathbf{g}.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Menggunakan hasil darab pangkah, persamaan (2.14) menjadi

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla \wedge \mathbf{u}_1 = -\alpha (\nabla \theta) \wedge \mathbf{g}.\quad (2.15)$$

Seterusnya, dengan mengambil keikalan dan vektor identiti, persamaan (2.15) menjadi

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 \mathbf{u}_1 = \alpha [(\mathbf{g} \cdot \nabla) \nabla \theta - \mathbf{g} \nabla^2 \theta].\quad (2.16)$$

Dengan mengambil komponen- z dan $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, diperolehi

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 w_1 &= \alpha g \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \theta, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 w &= \alpha g \nabla_1^2 \theta,\end{aligned}\quad (2.17)$$

dengan $\nabla_1^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ dan $\nabla^2 = \nabla_1^2 + \partial^2 / \partial z^2$. Persamaan (2.17) adalah persamaan momentum yang telah dilinearakan.

2.3.2 Persamaan tenaga

Penggantian gangguan (2.10) - (2.13) ke dalam persamaan (2.6) memberikan

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= \kappa \nabla^2 \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + w_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \kappa \nabla^2 \theta, \quad \text{yang} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\Delta T}{d} = \beta \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta w &= \kappa \nabla^2 \theta.\end{aligned}\quad (2.18)$$

Persamaan (2.18) adalah persamaan tenaga yang telah dilinearakan.

2.4 Syarat-syarat sempadan

2.4.1 Pada $z = 0$

Syarat-syarat sempadan pada permukaan bawah ($z = 0$) yang tegar adalah

$$w = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0. \quad (2.21)$$

Persamaan (2.19) merupakan persamaan bagi syarat tak tergelincir, manakala persamaan (2.20) diperoleh dari persamaan keselanjaran. Persamaan (2.21) menunjukkan penebatan sempurna pada permukaan bawah bendalir.

2.4.2 Pada $z = 1$

Syarat kinematik

Bendalir yang dibincangkan dalam masalah ini dibatasi oleh permukaan atas yang bebas bersentuh dengan udara pada tekanan malar p_a dan suhu malar T_∞ , dan permukaan bawahnya adalah tegar. Oleh itu, syarat kinematik untuk permukaan atas adalah

$$w = \delta_t + u\delta_x + v\delta_y, \quad (2.22)$$

dengan $\partial\delta/\partial t = \delta_t$, $\partial\delta/\partial x = \delta_x$ dan $\partial\delta/\partial y = \delta_y$. Oleh kerana pemencengan adalah dalam arah z , maka $\partial\delta/\partial x = 0$ dan $\partial\delta/\partial y = 0$. Oleh itu,

$$w = \frac{\partial\delta}{\partial t}. \quad (2.23)$$

Syarat keselanjaran

Syarat keselanjaran bagi tegasan normal adalah

$$p - p_a = \frac{2\mu}{N} \left[u_x\delta_x^2 + (u_y + u_x)\delta_x\delta_y - (u_z + w_x)\delta_x + v_y\delta_x^2 - (v_x + w_y)\delta_y + w_z \right] - \frac{\tau}{N\sqrt{N}}[\delta_{xx} + \delta_{yy}]. \quad (2.24)$$

dengan $N = (1 + \delta_x^2 + \delta_y^2)^{1/2}$, μ adalah kelikatan bendalir, τ adalah daya tegangan bagi permukaan bebas dan subskrip-subskrip x , y dan z masing-masing mewakili terbitan terhadap pembolehubah-pembolehubah x , y dan z . Kajian kestabilan linear bagi keadaan asas iaitu bendalir berada dalam keadaan rehat, $\mathbf{u} = 0$, permukaan bebas adalah mendatar, $\delta = 0$ dan suhu T_r tertabur secara seragam. Persamaan tekanan hidrostatik diperolehi daripada persamaan (2.9) iaitu

$$p(z) = p_a - \rho_0 g \left[1 + \frac{\alpha \Delta T}{2d} z \right] z,$$

dengan $p = p(z) + \delta p$, maka

$$\begin{aligned} p - \delta p &= p_a - \rho_0 g \left[1 + \frac{\alpha \Delta T}{2d} z \right] z, \\ p - p_a &= \delta p - \rho_0 g \left[1 + \frac{\alpha \Delta T}{2d} z \right] z. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Persamaan tegangan permukaan yang asal adalah $\tau = \tau_0 - \gamma(T - T_0)$. Dengan mengambil τ_0 sebagai tegangan permukaan pada suhu T_r , persamaan τ yang baru adalah

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 - \gamma(T_r + \theta - T_H + \beta d), \\ &= \tau_0 - \gamma(T_H - \beta(d + \delta) + \theta - T_H + \beta d), \\ &= \tau_0 - \gamma(\theta - \beta \delta). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dari persamaan (2.24) dan (2.25), diperolehi

$$\begin{aligned} \delta p - \rho_0 g \left[1 + \frac{\alpha \Delta T}{2d} z \right] z &= \frac{2\mu}{N} \left[u_x \delta_x^2 + (u_y + u_x) \delta_x \delta_y - (u_z + w_x) \delta_x + v_y \delta_x^2 \right. \\ &\quad \left. - (v_x + w_y) \delta_y + w_z \right] - \frac{\tau}{N\sqrt{N}} [\delta_{xx} + \delta_{yy}]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Oleh kerana pemesanan adalah dalam arah z , maka $\delta_x = 0$, $\delta_y = 0$, $N = 1$ dan $\tau = \tau_0$, maka persamaan (2.27) menjadi

$$\delta p - \delta \rho g \delta - 2\delta \delta \rho \nu w_z + \tau_0 \nabla_1^2 \delta = 0.$$

Oleh kerana $\delta \rho = \rho$ dan $\delta p = p$, maka

$$\begin{aligned} p - \rho_0 g \delta - 2\delta \rho_0 \nu w_z + \tau_0 \nabla_1^2 \delta &= 0, \\ p - \rho_0 g \delta - 2\mu \delta w_z + \tau_0 \nabla_1^2 \delta &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Syarat-syarat keselajaran bagi tegasan ricih adalah

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{N} \left[-2u_x \delta_x (1 + \delta_y^2) + (u_y + v_x) \left(-\delta_y (1 + \delta_y^2) + \delta_y \delta_x^2 \right) + 2v_y \delta_x \delta_y^2 \right. \\ & \left. + (u_z + w_x) (1 + \delta_y^2 - \delta_x^2) - 2\delta_x \delta_y (v_z + w_y) + 2w_z \delta_x \right] \\ & = [\tau_x - \delta_x \delta_y \tau_y + \delta_x \tau_z], \end{aligned} \quad (2.29)$$

dan

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{\sqrt{N}} \left[-\delta_x (v_x + u_y) - 2\delta_y v_y + (v_z + w_y) (1 - \delta_y^2) \right. \\ & \left. - (w_x + u_z) \delta_x \delta_y + 2w_z \delta_y \right] = [\tau_y + \delta_y \tau_z]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Oleh kerana $\delta_x = \delta_y = 0$, maka persamaan (2.29) menjadi

$$\mu(u_z + w_x) = \tau_x, \quad (2.31)$$

atau boleh ditulis sebagai

$$\mu(u_z + w_x) = -\gamma(\theta_x - \beta\delta_x), \quad (2.32)$$

$$\rho\nu(u_z + w_x) = -\gamma(\theta_x - \beta\delta_x). \quad (2.33)$$

Bezakan persamaan (2.33) terhadap y , diperolehi

$$\rho\nu(u_{yz} + w_{xy}) = -\gamma(\theta_{xy} - \beta\delta_{xy}). \quad (2.34)$$

Seterusnya, oleh kerana $\delta_x = \delta_y = 0$, maka persamaan (2.30) menjadi

$$\mu(v_z + w_y) = \tau_y, \quad (2.35)$$

atau boleh ditulis sebagai

$$\rho\nu(v_z + w_y) = -\gamma(\theta_y - \beta\delta_y). \quad (2.36)$$

Persamaan (2.36) dibezakan terhadap x , diperolehi

$$\rho\nu(v_{xz} + w_{xy}) = -\gamma(\theta_{xy} - \beta\delta_{xy}). \quad (2.37)$$

Penolakan persamaan (2.34) daripada persamaan (2.37) memberikan

$$\begin{aligned} \rho\nu(v_{xz} - u_{yz}) &= 0, \\ \rho\nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Seterusnya, persamaan (2.33) dan (2.36) masing-masing dibezakan terhadap x dan y sehingga diperolehi

$$\rho\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) = -\gamma \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \right), \quad (2.39)$$

$$\rho\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) = -\gamma \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} \right). \quad (2.40)$$

Dengan menambahkan persamaan (2.39) dan (2.40), persamaan berikut diperolehi

$$\begin{aligned} \rho\nu \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] &= -\gamma \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\theta - \beta \delta) \right], \\ \rho\nu \left[\left(\nabla_1^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] &= -\gamma \nabla_1^2 (\theta - \beta \delta). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Daripada persamaan keselajaran, diperolehi

$$\rho\nu \left(\nabla_1^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w = -\gamma \nabla_1^2 (\theta - \beta \delta). \quad (2.42)$$

Pada permukaan bebas, kita andaikan suhu mematuhi hukum penyejukan Newton,

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{h}{\chi} (\theta - \beta \delta), \quad (2.43)$$

yang χ adalah konduktif terma bendalir dan h adalah pekali pemindahan haba antara permukaan bebas dan udara.

Oleh itu, diperolehi persamaan-persamaan yang dilinearakan untuk syarat sempadan iaitu

$$w = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad (2.44)$$

pada $z = 0$, dan

$$w - \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0, \quad (2.45)$$

$$\rho\nu \left(\nabla_1^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w + \gamma \nabla_1^2 (\theta - \beta \delta) = 0, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{h}{\chi} (\theta - \beta \delta) = 0. \quad (2.47)$$

pada $z = 1$.

Seterusnya, kita boleh menentukan pemasangan permukaan dari persamaan (2.28),

$$p - \rho_0 g \delta - 2\mu \delta \frac{\partial w}{\partial z} = -\tau_0 \nabla_1^2 \delta,$$

iaitu dengan mendarabkan $-\nabla_1^2$ kepada persamaan tersebut, maka diperolehi

$$-\nabla_1^2 p - \rho_0 g \nabla_1^2 \delta + 2\mu \delta \nabla_1^2 \frac{\partial w}{\partial z} = \tau_0 (\nabla_1^2)^2 \delta, \quad (2.48)$$

dan dari persamaan momentum (2.5) iaitu

$$-\nabla p = \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} - \rho_0 \nu \nabla^2 w - \rho g,$$

menjadi

$$\begin{aligned} -\nabla_1^2 p &= \rho_0 \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla^2 w \right] - \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \rho g, \\ &= \rho_0 \left[- \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + \nu \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \nabla^2 w \right] - \nabla_1 \rho g. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Dengan menggantikan persamaan (2.49) ke dalam (2.48), diperolehi

$$\rho_0 \left[- \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + \nu \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \nabla^2 w \right] - \rho_0 g \nabla_1^2 \delta + 2\mu \nabla_1^2 \frac{\partial w}{\partial z} = \tau_0 (\nabla_1^2)^2 \delta. \quad (2.50)$$

2.5 Analisis pada mod normal

Seterusnya, kita akan menganalisis kuantiti usikan pada mod normal berikut

$$\begin{pmatrix} w \\ \theta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(z) \\ T(z) \\ f \end{pmatrix} \exp[i(k_x x + k_y y) + \bar{s}t], \quad (2.51)$$

yang k_x dan k_y masing-masing adalah nombor gelombang untuk usikan pada arah x dan y dengan $k = k_x^2 + k_y^2$ dan \bar{s} adalah parameter kestabilan. W , T dan f masing-masing adalah amplitud bagi halaju dalam arah menegak, suhu dan pemesanan pada permukaan atas bendalir yang bebas.

Kami memilih d , d^2/κ , κ/d , ΔT dan κ/d^2 masing-masing sebagai unit-unit tak berdimensi bagi jarak, masa (t), halaju (w), suhu (θ) dan canggaan permukaan (δ) dan kita lakukan penyahdimensian persamaan-persamaan menakluk dan syarat-syarat sempadan sehingga menghasilkan tujuh kumpulan tak berdimensi seperti dalam Jadual 2.1. Nombor Rayleigh, R , mengukur nisbah bagi

daya keapungan terhadap daya kelikatan, nombor Marangoni, M , mengukur nisbah daya termokapilari terhadap daya kelikatan, nombor Prandtl, P_r , mengukur nisbah antara skala masa kelikatan dan resapan terma, nombor Crispation, C_r , mengukur nisbah antara daya-daya kelikatan dan tegangan permukaan, nombor Biot, B_i , menggambarkan pemindahan haba pada permukaan bendalir, nombor Bond, B_o , mengukur nisbah daya graviti terhadap daya tegangan permukaan dan nombor Galileo, G , mengukur nisbah daya graviti terhadap daya kelikatan. Sementara itu, unit tak berdimensi bagi parameter nombor gelombang (k) adalah a/d . Bagi fungsi-fungsi yang bergantung kepada x , y dan t , kita dapati

JADUAL 2.1 Kuantiti-kuantiti tak berdimensi.

Nombor tak berdimensi	Simbol	Definisi
Rayleigh	R	$g\alpha d^3 \Delta T / \nu \kappa$
Marangoni	M	$\gamma d \Delta T / \rho_0 \nu \kappa$
Prandtl	P_r	ν / κ
Crispation	C_r	$\rho_0 \nu \kappa / \tau_0 d$
Biot	B_i	hd / χ
Bond	B_o	$\rho_0 g d^2 / \tau_0$
Galileo	G	$g d^3 / \nu^2$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \bar{s}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = -k^2 \quad \text{dan} \quad \nabla^2 = \frac{d^2}{dz^2} - k^2. \quad (2.52)$$

Maka, kami akan menggantikan persamaan (2.51) ke dalam persamaan menakluk dan syarat-syarat sempadan bagi menganalisis unsur-unsur berkenaan pada mod normal.

2.5.1 Persamaan momentum

Sekarang kami akan menyahdimensikan persamaan momentum

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) w &= -\alpha g \nabla_1^2 \theta, \\ \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 w &= -\alpha g \nabla_1^2 \theta. \end{aligned}$$

Persamaan momentum digantikan dengan skala tak berdimensi

$$\begin{aligned}
 \left[-\frac{\partial}{\partial t} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \frac{\kappa}{d} W &= -\alpha g (-k^2) T(z) \Delta T, \\
 \left[-\frac{\kappa s}{d^2} + \nu \left(\frac{D^2}{d^2} - \frac{a^2}{d^2} \right) \right] \left(\frac{D^2}{d^2} - \frac{a^2}{d^2} \right) \frac{\kappa}{d} W &= \alpha g \left(\frac{a^2}{d^2} \right) T(z) \Delta T, \\
 \frac{\kappa}{\nu d^5} \left[-\frac{\kappa s}{\nu} + \nu (D^2 - a^2) \right] (D^2 - a^2) W &= \frac{\alpha g}{\nu} \left(\frac{a^2}{d^2} \right) T(z) \Delta T, \\
 \left(-\frac{s}{P_r} + D^2 - a^2 \right) (D^2 - a^2) W &= \frac{\alpha g}{\nu} \left(\frac{a^2}{d^2} \right) T(z) \Delta T \left(\frac{d^5}{\kappa} \right), \\
 (D^2 - a^2) \left(D^2 - a^2 - \frac{s}{P_r} \right) W - a^2 R T &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

2.5.2 Persamaan tenaga

Seterusnya penyahdimensian persamaan tenaga dengan menggantikan dengan unit-unit tak berdimensi seperti berikut

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2 \right) \theta &= \beta w \\
 \left[\bar{s} - \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \right] T(z) \Delta T &= \frac{\Delta T \kappa}{d} \frac{d}{d} W, \\
 \left[\frac{\kappa}{d} s - \left(\frac{D^2}{d^2} - \frac{a^2}{d^2} \right) \right] T(z) \Delta T &= \frac{\Delta T \kappa}{d} \frac{d}{d} W, \\
 \frac{1}{d^2} \kappa [s - (D^2 - a^2)] T(z) \Delta T &= \frac{\Delta T}{d^2} \kappa W, \\
 [s - (D^2 - a^2)] T - W &= 0, \\
 (D^2 - a^2 - s) T + W &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

2.5.3 Syarat sempadan

Pada $z = 0$, dalam mod normal, syarat sempadan bagi halaju adalah

$$\begin{aligned}
 w &= 0, \\
 \frac{\kappa}{d} W &= 0, \\
 W &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

syarat bagi suhu pula menjadi

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 DT(z)\Delta T &= 0, \\
 DT &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.56}$$

dan daripada persamaan (2.20)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\kappa}{d^2}DW &= 0, \\
 DW &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.57}$$

Pada $z = 1$, dalam mod normal, syarat kinematik menjadi

$$\begin{aligned}
 w - \frac{\partial \delta}{\partial t} &= 0, \\
 \frac{\kappa}{d}W - \bar{s}df &= 0, \\
 \frac{\kappa}{d}W - \frac{d\kappa}{d^2}sf &= 0, \\
 sf - W &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.58}$$

syarat sempadan bagi suhu pula menjadi

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial z} &= -\frac{h}{\chi}(T - \delta\beta), \\
 \Delta T \frac{DT(z)}{d} &= -\frac{h}{\chi}\left(T(z)\Delta T - df \frac{\Delta T}{d}\right), \\
 DT &= -\frac{dh}{\chi}(T - f), \\
 DT &= -B_i(T - f), \\
 DT + B_i(T - f) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.59}$$

dan daripada persamaan (2.46)

$$\begin{aligned}
 \rho\nu \left(\nabla_1^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w &= \gamma \nabla_1^2 (\theta - \beta\delta), \\
 \rho\nu \left((-k^2) - \frac{D^2}{d^2} \right) \frac{\kappa}{d}W &= \gamma(-k^2)(T(z)\Delta T - \frac{\Delta T}{d}df), \\
 \rho\nu \left(-\frac{a^2}{d^2} - \frac{D^2}{d^2} \right) \frac{\kappa}{d}W &= -\gamma \left(\frac{a^2}{d^2} \right) \Delta T (T - f), \\
 \frac{\kappa\rho\nu}{d} (D^2 + a^2)W &= a^2\gamma\Delta T(T - f), \\
 (D^2 + a^2)W + a^2 \frac{\gamma\Delta T d}{\kappa\rho\nu} (T - f) &= 0, \\
 (D^2 + a^2)W + a^2 M (T - f) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.60}$$

Untuk menentukan pemerosongan permukaan, daripada persamaan (2.50)

$$\begin{aligned} \rho_0 \left[-\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \nu \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \nabla^2 w \right] - \rho_0 g \nabla_1^2 \delta + 2\mu \nabla_1^2 \frac{\partial w}{\partial z} &= \tau_0 (\nabla_1^2)^2 \delta, \\ \rho_0 \left[-\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \nu \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \nabla^2 w \right] - \rho_0 g \nabla_1^2 \delta + 2\mu \nabla_1^2 \frac{\partial w}{\partial z} - \tau_0 (\nabla_1^2)^2 \delta &= 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Gantikan persamaan (2.61) dengan skala tak berdimensi,

$$\begin{aligned} \rho_o \left(-\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial t} + \nu \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\rho_o \nu \nabla_1^2 \frac{\partial w}{\partial z} - \rho_o g \nabla_1^2 \delta - \tau_o (\nabla_1^2)^2 \delta &= 0, \\ \frac{\rho_o}{\tau_o} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu (\nabla^2 - 2\nabla_1^2) \right) \frac{\partial w}{\partial z} + \nabla_1^2 \left(\frac{\rho_o g}{\tau_o} + \nabla_1^2 \right) \delta &= 0, \\ \frac{\rho_o}{\tau_o} \left(\frac{\kappa}{d^2} s - \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 - 2k^2 \right) \right) \frac{\kappa}{d^2} DW + k^2 \left(\frac{\rho_o g}{\tau} + k^2 \right) \delta &= 0, \\ \frac{\rho_o}{\tau_o} \left(\frac{\kappa}{d^2} s - \nu \left(\frac{D^2}{\partial d^2} - \frac{3a^2}{d^2} \right) \right) \frac{\kappa}{d^2} DW + \frac{a^2}{d^2} \left(\frac{\rho_o g}{\tau} + \frac{a^2}{d^2} \right) df &= 0, \\ \frac{\kappa}{d^2} \frac{\rho_o}{\tau_o} \frac{1}{d} \nu \left(\frac{s}{\nu} - (D^2 - 3a^2) \right) DW + \frac{a^2}{d^4} \left(\frac{2\rho_o}{\tau_o} - \frac{a^2}{d^2} \right) df &= 0, \\ \frac{\rho_o \nu \kappa}{\tau_o} \left(\frac{s}{Pr} - (D^2 - 3a^2) \right) DW + a^2 (B_o + a^2) f &= 0, \\ Cr \left(\frac{s}{Pr} - (D^2 - 3a^2) \right) DW + a^2 (B_o + a^2) f &= 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Daripada persamaan (2.62), persamaan untuk pemerosongan permukaan diperoleh sebagai

$$\begin{aligned} f &= -\frac{Cr}{a^2 (B_o + a^2)} \left[\left(\frac{s}{Pr} - (D^2 - 3a^2) \right) DW \right], \\ &= \frac{(D^2 - 3a^2 - s/Pr) DW}{a^2 (Pr G + a^2 / Cr)}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

BAB III

KEPUTUSAN DAN PERBINCANGAN

3.1 Penyelesaian masalah kestabilan

Dalam bab ini, kami akan mencari ungkapan bagi nombor Rayleigh pada peringkat utama, R_0 dan pada peringkat pertama, R_1 secara analisis berpandukan penyelesaian berasimptot untuk olakan Bénard-Marangoni bagi kes $C_r \neq 0$ dalam had nombor gelombang yang sangat kecil, $a \rightarrow 0$. Diketahui persamaan menakluk pada lengkung sut adalah seperti berikut

$$(D^2 - a^2)\left(D^2 - a^2 - \frac{s}{P_r}\right)W - a^2RT = 0, \quad (3.1)$$

$$(D^2 - a^2 - s)T + W = 0, \quad (3.2)$$

tertakluk kepada syarat sempadan

$$W = 0, \quad (3.3)$$

$$DW = 0, \quad (3.4)$$

$$DT = 0, \quad (3.5)$$

pada batas bawah yang bertebat dan tegar $z = 0$, dan

$$sf - W = 0, \quad (3.6)$$

$$(D^2 + a^2)W + a^2M(T - f) = 0, \quad (3.7)$$

$$DT + B_i(T - f) = 0, \quad (3.8)$$

RUJUKAN

- Anderson, J. D. J. 1995. *Computational fluid dynamics: the basics with application*. mcGraw-hill, New York.
- Benguria, R. D. & Depassier, M. C. 1989. On the linear stability theory of Bénard-Marangoni convection. *Phys. Fluids* **30**: 1123–1127.
- Block, M. J. 1956. Surface tension as the cause of Benard cells and surface deformation in a liquid film. *Nature* **178**: 34.
- Char, M. I. & Chiang, K. T. 1994. Stability analysis of Bénard-Marangoni convection in fluids with internal heat generation. *J. Phys. D: Appl. Phys.* **27**: 748–755.
- Clever, R. M. & Busse, F. H. 1995. Convection rolls and their instabilities in the presence of a nearly insulating upper boundary. *Phys. Fluids* **7** (1): 92–97.
- Davis, S. H. & Homsy, G. M. 1980. Energy stability for free surface problems: Buoyancy-thermocapillary layers. *J. Fluid Mech.* **98** (3): 527–553.
- Gouesbet, G., Maquet, J., Roze, C. & Darrigo, R. 1990. Surface-tension- and coupled buoyancy-driven instability in a horizontal liquid layer. overstability and exchange of stability. *Phys. Fluids* **2** (6): 903–911.
- Hashim, I. 1998. Theoretical analysis of the onset of Bénard-Marangoni convection. Tesis ph.d, University of Strathclyde.
- Hashim, I. & Wilson, S. K. 1999. The effect of uniform vertical magnetic field on the onset of steady Marangoni convection in horizontal layer of conducting fluid. *Int. J. Heat Mass Transfer* **42**: 525–533.
- Koschmieder, E. L. 1993. *Bénard cells and Taylor vortices*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kozhoukharova, Z., Roze, C. & Lebon, G. 1995. Surface-tension instability in a fluid layer with variable viscosity and deformable upper surface. *Microgravity Sci. Tech.* **4**: 249–255.

- Nield, D. A. 1964. Surface tension and buoyancy effects in cellular convection. *J. Fluid Mech.* **19**: 341–352.
- Norihan, M. A. & Hashim, I. 2003. Growth rates of Bénard-Marangoni convection in a fluid layer in the presence of a magnetic field. *School of Mathematical Sciences, UKM* .
- Pearson, J. R. A. 1958. On convection cells induced by surface tension. *J. Fluid Mech.* **4**: 489–500.
- Percz-Garcia, C. & Carncio, G. 1991. Linear stability analysis of Bénard-Marangoni convection in fluids with a deformable free surface. *Phys. Fluids A* **3** (2): 292–298.
- Priede, J. W. & Gunter, G. 1997. Influence of thermal boundary conditons on the stability of thermocapillary-driven convection at low prandtl numbers. *Phys. Fluids* **9** (6): 1621–1633.
- Selak, R. & Lebon, G. 1995. Bénard-Marangoni thermoconvection instability in presence of a temperature-dependent viscosity. *J. Phys. II France* **3**: 1185–1199.
- Takashima, M. 1970. Nature of the neutral state in convective instability induced by surface tension and buoyancy. *J. Phys. Soc. Japan* **28** (4): 810.
- Velarde, M. G. & Normand, C. 1980. Convection. *Scientific American* **243**: 79–93.
- Wilson, S. K. 1993. The effect of a uniform magnetic field on the onset of steady Bénard-Marangoni convection in a layer of conducting fluid. *J. Engng Math.* **27**: 161–188.
- Wilson, S. K. 1997. The effect of a uniform internal heat generation on the onset of steady marangoni convection in a horizontal layer of fluid. *Acta Mechanica* **124**: 63–78.