

ALIRAN LAPISAN SEMPADAN OLAKAN BEBAS BERLAMINA  
TERHADAP SFERA PEJAL DALAM BENDALIR LIKAT

NOORZEHAN FAZAHYAH BINTI MD SHAB

PROJEK PENYELIDIKAN YANG DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI  
SEBAHAGIAN DARIPADA SYARAT MEMPEROLEH IJAZAH SARJANA  
SAINS

PUSAT PENGAJIAN SAINS MATEMATIK  
UNIVERSITI KEBANGSAAN MALAYSIA  
BANGI

2004

## **PENAKUAN**

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang tiap-tiap satunya telah saya jelaskan sumbernya.

1 Mei 2004

Noorzehan Fazahiyah binti Md Shab  
P27016



**PTTA UTHM**  
PERPUSTAKAAN TUNKU TUN AMINAH

## PENGHARGAAN

Dengan Nama Allah Yang Maha Pemurah lagi Maha Penyayang

Segala puji-pujian hanyalah bagi Allah S.W.T., Tuhan sekalian alam. Selawat dan restu Allah untuk junjungan kami Muhammad, nabi yang mulia, kepada keluarga Baginda dan para sahabat Baginda amnya.

Syukur yang tidak terhingga ke hadrat Ilahi kerana dengan petunjuk dan hidayah-Nya dapatlah saya menyiapkan projek penyelidikan ini bagi memenuhi keperluan penganugerahan Ijazah Sarjana Sains.

Setinggi-tinggi penghargaan dan ucapan terima kasih ditujukan buat Dr. Roslinda Mohd Nazar selaku penyelia saya yang telah banyak memberi bimbingan dan tunjuk ajar sehingga terhasilnya projek penyelidikan ini. Juga untuk para pensyarah di Pusat Pengajian Sains Matematik yang banyak memberikan ilmu yang bermanfaat.

Terima kasih juga kepada Kolej Universiti Teknologi Tun Hussein Onn dan Jabatan Perkhidmatan Awam yang membiayai pengajian Sarjana Matematik saya ini.

Teristimewa buat suami tercinta, Mohd Zamzam Sharif, terima kasih atas sokongan, perangsang dan kasih sayang yang dicurahkan. Juga buat ayahanda bonda dan keluarga yang telah banyak memberi dorongan sepanjang penghasilan projek penyelidikan ini. Terima kasih atas doa kalian.

Saya mengambil kesempatan ini juga untuk merakamkan ribuan terima kasih kepada rakan-rakan seperjuangan yang sama-sama memberi semangat dan galakan untuk menyiapkan projek penyelidikan ini.

Saya memohon semoga Allah S.W.T. melimpahkan nur dan kasih-Nya kepada kalian. Semoga segala pengorbanan kita bersama diredhai oleh-Nya.

Wassalam

NOORZEHAN FAZAHYAH MD SHAB

## ABSTRAK

Model matematik bagi aliran lapisan sempadan olakan bebas berlamina terhadap sfera pejal dalam bendalir likat dengan syarat sempadan isoterma dibincangkan dalam kajian ini. Persamaan menakluk lapisan sempadan dinyahdimensikan dan kemudiannya persamaan pembezaan separa tak linear tersebut dijelmakan menggunakan jelmaan tak serupa yang sesuai. Seterusnya, persamaan-persamaan ini diselesaikan secara berangka dengan menggunakan kaedah kotak Keller. Kaedah ini adalah suatu kaedah beza terhingga tersirat yang fleksibel dan efisien. Penyelesaian berangka yang diperoleh merangkumi ciri-ciri pemindahan haba iaitu pekali pemindahan haba setempat dan pekali geseran kulit setempat, serta profil halaju dan suhu. Didapati, pekali pemindahan haba setempat menokok, berbanding pekali geseran kulit setempat yang menyusut dengan pertambahan nilai  $Pr$ . Seterusnya, profil suhu dan profil halaju menyusut pada lapisan yang lebih jauh dari permukaan sfera. Penyelesaian berangka diaturcarakan dalam perisian Matlab 5.3.



PTTA  
PERPUSTAKAAN TUNKU TUN AMINAH

## ABSTRACT

A mathematical model for laminar free convection boundary layer flow over a solid sphere in a viscous fluid is studied by considering the isothermal boundary condition. The boundary layer governing equations are non-dimensionalized and transformed by an appropriate non similar transformation. These equations are then solved numerically using a flexible and efficient implicit finite difference scheme, the Keller box method. The numerical results presented include the heat transfer characteristics, which are the local heat transfer and skin friction coefficients, as well as velocity and temperature profiles. The local heat transfer coefficient increases, while the skin friction coefficient decreases as value of  $Pr$  increases. Meanwhile, velocity and temperature profiles decrease as the layer far away from the sphere surface. The numerical solution was programmed in Matlab 5.3.



PTTA UTM  
PERPUSTAKAAN TUNKU TUN AMINAH

## KANDUNGAN

	<b>HALAMAN</b>
<b>PENAKUAN</b>	ii
<b>PENGHARGAAN</b>	iii
<b>ABSTRAK</b>	iv
<b>ABSTRACT</b>	v
<b>KANDUNGAN</b>	vi
<b>SENARAI JADUAL</b>	viii
<b>SENARAI RAJAH</b>	ix
<b>SENARAI SIMBOL</b>	x
<b>BAB I      PENGENALAN</b>	
1.1      Konsep Asas dan Definisi Olakan	1
1.2      Konsep Asas Lapisan Bendalir	3
1.3      Objektif dan Skop Kajian	4
1.4      Rangka Kajian	4
1.5      Kajian-kajian Terdahulu	5
1.5.1      Olakan Bebas pada Sfera	5
1.5.2      Kaedah Kotak Keller	6
<b>BAB II      PERSAMAAN ASAS BAGI ALIRAN LAPISAN SEMPADAN                  OLAKAN BEBAS</b>	
2.1      Andaian Lapisan Sempadan dan Anggaran Boussinesq	8
2.2      Persamaan Berdimensi	10
2.3      Persamaan Tak Berdimensi	10
2.4      Persamaan Terjelma	13
<b>BAB III     KAEDAH BERANGKA</b>	
3.1      Kaedah Beza Terhingga	18
3.2      Kaedah Newton	23
3.3      Kaedah Penghapusan Blok	27

**HALAMAN**

3.4	Keadaan Mula	34
<b>BAB IV PENYELESAIAN BERANGKA DAN PERBINCANGAN</b>		
4.1	Pekali Pemindahan Haba dan Geseran Kulit Setempat	39
4.2	Profil Suhu dan Halaju	41
<b>BAB V KESIMPULAN</b>		
5.1	Kesimpulan	49
5.2	Kajian Lanjutan	50
<b>RUJUKAN</b>		
<b>LAMPIRAN</b>		
A	Senarai simbol aturcara Matlab 5.3	53
B	Aturcara Kaedah Kotak Keller Menggunakan Matlab 5.3	54



**SENARAI JADUAL**

4.1	Nilai pekali pemindahan haba setempat, $Q_w$ pada nilai $x$ yang berbeza dan $Pr = 0.7$ . . . . .	41
4.2	Nilai pekali pemindahan haba setempat, $Q_w$ pada nilai $x$ yang berbeza dan $Pr = 7$ . . . . .	41
4.3	Nilai pekali geseran kulit setempat, $C_f$ pada nilai $x$ yang berbeza dan $Pr = 0.7$ . . . . .	42
4.4	Nilai pekali geseran kulit setempat, $C_f$ pada nilai $x$ yang berbeza dan $Pr = 7$ . . . . .	42



**PTTA UTHM**  
PERPUSTAKAAN TUNKU TUN AMINAH



## SENARAI RAJAH

1.1	Proses Olakan . . . . .	2
1.2	Lapisan Sempadan Halaju dan Terma . . . . .	4
2.1	Model Fizikal . . . . .	11
3.1	Jaring Segiempat Tepat untuk Anggaran Pembezaan . . . . .	19
3.2	Carta Alir untuk Kaedah Kotak Keller . . . . .	38
4.1	Variasi pekali pemindahan haba setempat $Q_w$ terhadap $x$ untuk $Pr = 0.7$	43
4.2	Variasi pekali pemindahan haba setempat $Q_w$ terhadap $x$ untuk $Pr = 7$	44
4.3	Variasi pekali geseran kulit setempat $C_f$ terhadap $x$ untuk $Pr = 0.7$ . .	44
4.4	Variasi pekali geseran kulit setempat $C_f$ terhadap $x$ untuk $Pr = 7$ . . .	45
4.5	Profil suhu, $\theta$ pada nilai $x$ yang berbeza untuk $Pr = 0.7$ . . . . .	45
4.6	Profil suhu, $\theta$ pada nilai $x$ yang berbeza untuk $Pr = 7$ . . . . .	46
4.7	Profil suhu, $\theta$ pada nilai $x$ yang berbeza untuk $Pr = 0.7$ dan $7$ . . . . .	46
4.8	Profil halaju, $\frac{\partial f}{\partial y}$ pada nilai $x$ yang berbeza untuk $Pr = 0.7$ . . . . .	47
4.9	Profil halaju, $\frac{\partial f}{\partial y}$ pada nilai $x$ yang berbeza untuk $Pr = 7$ . . . . .	47
4.10	Profil halaju, $\frac{\partial f}{\partial y}$ pada nilai $x$ yang berbeza untuk $Pr = 0.7$ dan $7$ . . . .	48



## SENARAI SIMBOL

### Simbol Am

$a$	jejari sfera
$C_f$	pekali geseran kulit setempat
$g$	pecutan graviti
$Gr$	nombor Grashof
$h_j$	jarak- $\Delta y$
$k_n$	jarak- $\Delta x$
$P_i$	bucu segiempat tepat jaring
$Pr$	nombor Prandtl
$\bar{p}$	tekanan bendalir
$Q_w$	pekali pemindahan haba setempat
$T$	suhu bendalir
$T_w$	suhu sfera
$T_\infty$	suhu sekitaran
$u$	komponen halaju tak berdimensi di sepanjang paksi- $x$
$v$	komponen halaju tak berdimensi di sepanjang paksi- $y$
$\vec{V}$	vektor halaju
$x, y$	koordinat-koordinat Kartesan tak berdimensi
$\nabla^2$	operator Laplacian

### Simbol Greek

$\beta$	pekali pengembangan terma
$\mu$	kelikatan dinamik
$\nu$	kelikatan kinematik bendalir
$\rho$	ketumpatan bendalir
$\psi$	fungsi strim

## BAB I

### PENGENALAN

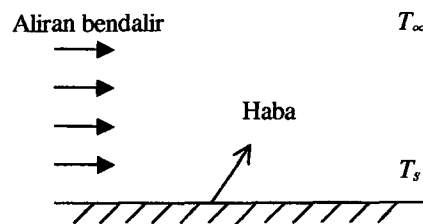
Kebelakangan ini, kebanyakan penyelidikan dalam bidang pemindahan haba tertumpu kepada proses olakan. Pengetahuan tentang proses pemindahan haba dan kebolehan menganalisis secara kuantitatif masalah-masalah yang berkaitan dengan pemindahan haba terutamanya olakan adalah penting kerana teknologi moden kini telah menjadi semakin kompleks. Hampir setiap fasa kerja saintifik dan kejuruteraan melibatkan pemindahan tenaga melalui pemindahan haba. Ia boleh berlaku dalam pelbagai masalah seperti aliran atmosfera, penjaanaan turbin, penyejukan litar elektronik dan sebagainya.

Sebelum kami meneruskan kajian berkenaan olakan, perlulah dijelaskan dahulu apakah yang dimaksudkan dengan olakan serta bagaimana ianya boleh berlaku.

#### 1.1 Konsep Asas dan Definisi Olakan

Istilah olakan adalah merujuk kepada pemindahan haba yang wujud di antara suatu permukaan dengan bendalir yang mengalir, apabila keduanya berlainan suhu (sila rujuk Rajah 1.1). Proses olakan ini terdiri daripada dua mekanisme, iaitu pemindahan tenaga yang disebabkan pergerakan rawak molekul-molekul bendalir, atau pun peresapan dan juga pemindahan tenaga yang disebabkan oleh aliran

bendalir itu sendiri (Chapman 1984).



RAJAH 1.1 Proses Olakan

Secara amnya, proses olakan terbahagi kepada dua proses, iaitu olakan paksa dan juga olakan bebas. Olakan paksa terjadi apabila aliran bendalir itu disebabkan oleh daya luaran, contohnya kipas, pam ataupun tiupan angin. Sebaliknya, olakan bebas pula terjadi apabila aliran bendalir itu didorong oleh daya keapungan dalam bendalir itu sendiri (Darus 1995). Sebagai contoh, olakan bebas wujud dari jalan raya yang panas ke atmosfera pada siang hari. Udara yang bersentuhan dengan jalan raya yang panas mempunyai ketumpatan yang lebih rendah daripada udara yang lebih sejuk di atas jalan raya itu. Jadi, akan wujud suatu kitaran yang mana udara panas akan naik ke atas sementara udara sejuk akan bergerak ke bawah. Namun, apabila wujudnya tiupan angin, pemindahan haba tersebut akan berubah kepada olakan paksa, walaupun olakan bebas masih berlaku.

Seperti yang telah kami jelaskan sebelum ini, pemindahan haba secara olakan adalah gabungan daripada kesan konduksi dan gerakan rawak molekul bendalir itu sendiri. Secara amnya, tenaga yang dipindahkan adalah haba dalaman bendalir tersebut. Walau bagaimanapun, wujud satu lagi proses olakan yang melibatkan perubahan haba pendam (Simonson 1991). Perubahan haba pendam ini secara amnya melibatkan perubahan fasa di antara keadaan cecair dan wap bagi bendalir. Dua kes khas untuk proses olakan ini ialah pendidihan dan kondensasi.

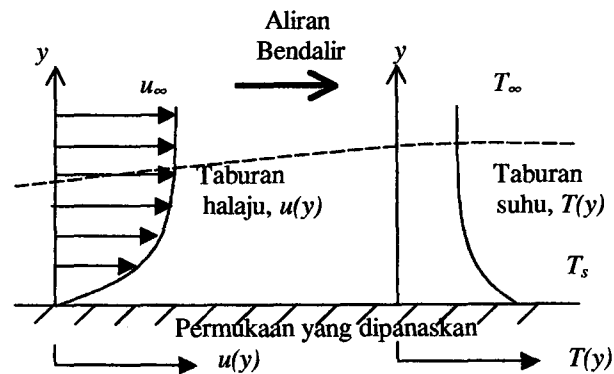
## 1.2 Konsep Asas Lapisan Sempadan

Idea-idea asas yang menghasilkan lapisan sempadan telah mula dibangunkan oleh Prandtl pada tahun 1904 (Schlichting 1979). Idea utamanya adalah membahagikan aliran bendalir kepada dua bahagian penting. Bahagian yang lebih besar adalah kawasan aliran bebas bagi bendalir, yang jauh dari permukaan pejal dan dipertimbangkan tidak likat. Manakala bahagian yang lebih kecil ialah lapisan tipis yang berada di atas permukaan pejal yang mempertimbangkan kesan kelikatan, konduktiviti terma dan peresapan jisim (Burmeister 1983).

Pertimbangkan kes termudah bagi aliran bendalir yang melalui suatu permukaan yang dipanaskan, lihat Rajah 1.2. Halaju bendalir akan berubah daripada halaju seragam iaitu aliran bebas pada titik yang jauh dari permukaan kepada halaju sifar pada permukaan. Bagi bendalir yang mempunyai kelikatan rendah, seperti udara dan air, kawasan yang berada di atas permukaan adalah amat tipis, bergantung kepada halaju aliran bebas bendalir tersebut.

Seterusnya, interaksi di antara bendalir dan permukaan tersebut akan mewujudkan suatu kawasan dalam bendalir yang halajunya berubah daripada sifar pada permukaan, kepada nilai terhingga  $u_\infty$ . Kawasan ini dikenali sebagai lapisan sempadan halaju. Di luar daripada kawasan ini, kesan permukaan pejal adalah diabaikan.

Malah, jika suhu bagi bendalir dan permukaan tersebut berbeza, akan wujud juga suatu kawasan dalam bendalir yang suhunya berubah daripada  $T_s$  pada  $y = 0$  kepada  $T_\infty$  pada aliran yang di sebelah luar. Kawasan ini pula dikenali sebagai lapisan sempadan terma (Incropera & Dewitt 1985). Perhatikan bahawa, jika  $T_s > T_\infty$ , proses olakan akan berlaku di antara bendalir dan permukaan.



RAJAH 1.2 Lapisan Sempadan Halaju dan Termal

### 1.3 Objektif dan Skop Kajian

Dalam kajian ini, pembentukan aliran lapisan sempadan pada permukaan sfera dalam medan aliran haba olakan bebas akan dipertimbangkan. Objektif kajian ini adalah untuk membina model matematik bagi mencari formulasi matematik dan analisis untuk masalah yang dipertimbangkan. Seterusnya, algoritma berangka untuk pengiraan bagi penyelesaian masalah ini dibina.

Skop kajian ini hanya tertumpu kepada masalah aliran lapisan sempadan olakan bebas berlamina dua dimensi yang mantap pada sfera pejal di dalam suatu bendalir likat yang berlainan suhu. Masalah ini diformulasikan dengan kaedah penjelmaan dan diselesaikan secara berangka dengan kaedah beza terhingga tersirat kotak Keller.

### 1.4 Rangka Kajian

Kajian ini dibahagikan kepada lima bab termasuk bab pengenalan ini. Bab I ini adalah merupakan suatu pengenalan asas kepada masalah olakan bebas dan kajian-kajian yang telah dijalankan sebelum ini. Dalam kajian ini, masalah aliran lapisan sempadan olakan bebas berlamina dua dimensi yang mantap pada sfera

pejal di dalam suatu bendalir likat yang berlainan suhu akan dibincangkan. Jadi, model matematik bagi masalah ini akan dikaji dalam Bab II.

Masalah yang dikaji ini akan diselesaikan secara berangka dengan menggunakan kaedah beza terhingga tersirat yang dikenali sebagai kaedah kotak Keller yang akan kami jelaskan dalam Bab III. Kaedah ini adalah suatu kaedah yang fleksibel dan efisien untuk menyelesaikan masalah olakan bebas mahupun olakan paksa. Kami telah memprogramkan kaedah kotak Keller ini dengan menggunakan perisian Matlab 5.3.

Seterusnya, dalam Bab IV, kuantiti fizikal yang diperoleh seperti pekali pemindahan haba setempat dan pekali geseran kulit setempat serta profil halaju dan suhu akan dibincangkan. Akhir sekali, kami akan membuat kesimpulan tentang kajian ini dalam Bab V, serta memberi cadangan untuk kajian-kajian lanjutan.

## 1.5 Kajian-kajian Terdahulu

### 1.5.1 Olakan Bebas pada Sfera

Kajian tentang olakan bebas pada sfera dalam bendalir likat telah dipertimbangkan oleh Chiang *et al.* (1964), manakala Chen & Mocoglu (1977) telah mengkaji tentang olakan bebas dan paksa pada sfera, juga dalam bendalir likat. Seterusnya, Huang & Chen (1987) telah mengkaji kes yang sama dengan mempertimbangkan kesan hembusan dan sedutan terhadap bendalir.

Antara yang terkini, Nazar *et al.* (2002b) telah mengkaji olakan bebas lapisan sempadan pada sfera dalam bendalir mikropolar, dan meneruskan kajiannya untuk sfera dengan fluks haba permukaan yang malar (Nazar *et al.* 2002a).

Olakan bebas pada sfera adalah suatu masalah penting yang berkait rapat dengan pelbagai aplikasi kejuruteraan. Penyelesaian tepat secara analisis masih tidak boleh diperoleh kerana ketaklinearan persamaan tenaga dan persamaan Navier-Stokes. Oleh kerana itu, masalah olakan bebas pada sfera ini

kurang diberi tumpuan oleh para pengkaji.

Dalam kajian ini, masalah lapisan sempadan olakan bebas pada sfera pejal dalam bendalir likat dikaji secara berangka. Keputusan yang diperoleh dibandingkan dengan keputusan Huang & Chen (1987) dan didapati keputusan perbandingan amat memuaskan.

### 1.5.2 Kaedah Kotak Keller

Satu kaedah beza terhingga tersirat yang tepat dan berkesan telah direka untuk menyelesaikan persamaan pembezaan separa parabolik oleh H. B. Keller pada tahun 1970, yang dinamakan kaedah kotak Keller. Kaedah ini sesuai untuk mencari penyelesaian berangka bagi sebarang persamaan pembezaan separa parabolik. Ianya merangkumi skim beza terhingga tersirat dan juga pelinearan dengan menggunakan kaedah Newton. Kaedah ini telah digunakan secara meluas dan dipercayai paling mudah disesuaikan untuk sebarang masalah. Ia telah digunakan dalam aliran lapisan sempadan lamina oleh Keller & Cebeci (1971), dan untuk aliran lapisan sempadan gelora oleh Cebeci & Smith (1974). Ia juga telah dinyatakan oleh Chen & Mocoglu (1977) sebagai kaedah yang cepat, mudah dan lebih sesuai digunakan.

Kaedah ini juga boleh digunakan untuk pelbagai masalah aliran lapisan sempadan bendalir, yang melibatkan olakan bebas dan paksa. Penggunaan kaedah ini untuk menyelesaikan masalah aliran lapisan sempadan olakan campuran telah dibincangkan oleh Chen & Mocoglu (1977). Seterusnya, Na (1979) telah membincangkan tentang olakan bebas pada plat rata mengufuk menggunakan kaedah kotak Keller ini.

Seterusnya, kaedah tersirat ini juga digunakan untuk masalah yang melibatkan bendalir mikropolar yang lain oleh Bhattacharyya & Pop (1996) dan Rees & Pop (1998). Manakala Nazar & Amin (2001) telah membandingkan kaedah ini dengan kaedah penyelesaian masalah lapisan sempadan yang lain dan didapati kaedah ini paling berkesan dan sesuai. Nazar & Amin (2003) juga mengkaji



masalah olakan bebas pada silinder mengufuk dengan kaedah ini. Kajian tentang lapisan sempadan olakan campuran pada sfera dalam bendalir mikropolar, yang juga menggunakan kaedah ini telah dibincangkan oleh Nazar *et al.* (2003).

Dalam kajian ini, kami akan menggunakan kaedah kotak Keller untuk mendapatkan penyelesaian bagi masalah lapisan sempadan olakan bebas pada sfera dalam bendalir likat dengan suhu permukaan yang malar.



PTTA UTHM  
PERPUSTAKAAN TUNKU TUN AMINAH

## BAB II

### PERSAMAAN ASAS BAGI ALIRAN LAPISAN SEMPADAN OLAKAN BEBAS

Dalam Bab I, kami telah menceritakan serba sedikit tentang punca-punca kejadian fenomena olakan, serta kajian dan penyelidikan terdahulu. Seterusnya, di dalam bab ini kami akan menerbitkan persamaan menakluk bagi masalah olakan bebas pada sfera dalam bendalir likat dengan mempertimbangkan andaian lapisan sempadan dan juga anggaran Boussinesq.

Persamaan menakluk dipermudahkan dengan menggunakan analisis peringkat-magnitud dan anggapan bahawa ketebalan lapisan sempadan adalah amat kecil. Dalam kajian ini, kami akan menjelaskan secara ringkas tentang andaian lapisan sempadan dan anggaran Boussinesq, seterusnya mendapatkan persamaan menakluk berdimensi yang akan diturunkan kepada persamaan tak berdimensi dan akhirnya penjelmaan tak serupa akan diperkenalkan.

#### 2.1 Andaian Lapisan Sempadan dan Anggaran Boussinesq

Untuk mendapatkan persamaan menakluk berdimensi bagi aliran bendalir likat dan tak termampatkan, beberapa andaian-andaian fizikal perlu dibuat untuk memudahkan kaedah menganalisis aliran lapisan sempadan. Andaian-andaian yang dibuat adalah seperti berikut:

1. Medan aliran mantap
2. Bendalir Newtonan
3. Medan aliran dua dimensi
4. Bendalir tak termampatkan

Kami juga mengandaikan bahawa kesemua sifat bendalir, kecuali ketumpatan, adalah malar dan mengabaikan kesan ketiadaan kelikatan. Oleh itu, dalam bentuk vektor (Pop & Ingham 2001), diperoleh

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0 \quad (2.1)$$

$$(\bar{V} \cdot \bar{\nabla})\bar{V} = -\frac{1}{\rho}\bar{\nabla}\bar{p} + \nu\bar{\nabla}^2\bar{V} + \frac{\rho - \rho_\infty}{\rho_\infty}g \quad (2.2)$$

$$(\bar{V} \cdot \bar{\nabla})\bar{T} = \bar{a}\bar{\nabla}^2\bar{T} \quad (2.3)$$

dengan  $\bar{V}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{\nabla}^2$ ,  $g$ ,  $\nu$ ,  $\rho$ ,  $\rho_\infty$  dan  $\bar{a}$  masing-masing adalah vektor halaju, suhu bendalir, tekanan bendalir, operator Laplacian, vektor pecutan graviti, kelikatan kinematik, ketumpatan bendalir, ketumpatan malar setempat dan peresapan terma.

Untuk kebanyakan bendalir sebenar dan syarat-syarat aliran bendalir, cara termudah untuk menyatakan perbezaan ketumpatan ( $\rho - \rho_\infty$ ) dalam sebutan keapungan dalam persamaan momentum (2.2) adalah diberi oleh Pop & Ingham (2001),

$$\rho = \rho_\infty[1 - \beta(\bar{T} - T_\infty)], \quad (2.4)$$

dengan  $\beta$  adalah pekali kembangan terma dan  $T_\infty$  adalah suhu sekitaran.

Persamaan (2.4) adalah suatu anggaran yang baik untuk perubahan ketumpatan, yang dikenali sebagai anggaran Boussinesq (Bejan 1984). Anggaran Boussinesq menyatakan bahawa:

1. Kesemua perubahan bagi sifat-sifat bendalir boleh diabaikan sepenuhnya kecuali untuk ketumpatan dalam persamaan momentum.
2. Perubahan dalam ketumpatan juga diabaikan kecuali ia melibatkan daya keapungan. Ketumpatan hanya dipertimbangkan berubah dengan suhu sahaja.

## 2.2 Persamaan Berdimensi

Pertimbangkan sebuah sfera pejal yang telah dipanaskan dengan suhu  $T_w$  dan berjari  $a$ , yang dimasukkan ke dalam suatu bendalir likat yang bersuhu  $T_\infty$ , seperti di dalam Rajah 2.1. Dengan menggunakan penghampiran lapisan sempadan dan penghampiran Boussinesq, berikut adalah persamaan menakluk berdimensi bagi masalah ini;

**Persamaan Keselajaran:**

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{r}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\bar{r}\bar{v}) = 0 \quad (2.5)$$

**Persamaan Momentum:**

$$\rho \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \rho g \beta (T - T_\infty) \sin \left( \frac{\bar{x}}{a} \right) \quad (2.6)$$

**Persamaan Tenaga:**

$$\bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.7)$$

yang  $\bar{r}(\bar{x}) = a \sin \left( \frac{\bar{x}}{a} \right)$ . Syarat sempadan bagi persamaan (2.5) hingga (2.7) adalah:

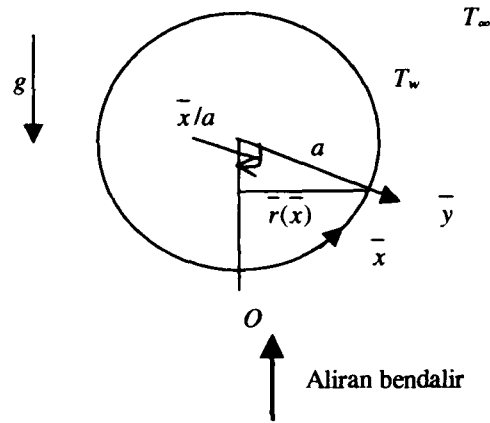
$$\bar{u} = \bar{v} = 0, \quad T = T_w, \quad \text{pada } \bar{y} = 0, \quad (2.8)$$

$$\bar{u} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty \quad \text{pada } \bar{y} \rightarrow \infty, \quad (2.9)$$

yang  $(\bar{u}, \bar{v})$  ialah komponen halaju di sepanjang paksi- $x$  dan  $-y$ , manakala  $T, \rho, \nu, g, \beta$  dan  $Pr$  masing-masing adalah suhu bendalir, ketumpatan bendalir, kelikatan kinematik, pecutan graviti, pekali pengembangan terma, dan nombor Prandtl.

## 2.3 Persamaan Tak Berdimensi

Untuk menyelesaikan persamaan menakluk berdimensi (2.5) hingga (2.7) yang tertakluk kepada syarat sempadan (2.8) dan (2.9), kami akan menyahdimensikan



RAJAH 2.1 Model Fizikal

persamaan-persamaan tersebut dengan memperkenalkan pemboleh ubah-pemboleh ubah baru tak berdimensi berikut:

$$x = \frac{\bar{x}}{a}, \quad y = Gr^{1/4} \left( \frac{\bar{y}}{a} \right), \quad u = \left( \frac{a}{\nu} \right) Gr^{-1/2} \bar{u}, \quad (2.10)$$

$$v = \left( \frac{a}{\nu} \right) Gr^{-1/4} \bar{v}, \quad \theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}}, \quad (2.11)$$

dengan  $Gr = g\beta(T_w - T_{\infty})a^3/\nu^2$  adalah nombor Grashof.

Sekarang, pertimbangkan persamaan keselajaran (2.5). Dengan menggunakan pemboleh ubah (2.10) dan (2.11), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{r}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\bar{r}\bar{v}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial(xa)} \left[ a \sin x \cdot u \left( \frac{\nu Gr^{1/2}}{a} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial(yaGr^{-1/4})} \left[ a \sin x \cdot v \left( \frac{\nu Gr^{1/4}}{a} \right) \right] &= 0 \\ \left( \frac{\nu Gr^{1/2}}{a^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} (a \sin x \cdot u) + \left( \frac{\nu Gr^{1/2}}{a^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} (a \sin x \cdot v) &= 0 \\ \left( \frac{\nu Gr^{1/2}}{a^2} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial x}(ru) + \frac{\partial}{\partial y}(rv) \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(ru) + \frac{\partial}{\partial y}(rv) &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Persamaan (2.12) di atas adalah persamaan keselajaran dalam bentuk tak berdimensi. Seterusnya, pertimbangkan pula persamaan momentum (2.6). Juga dengan menggantikan pemboleh ubah (2.10) dan (2.11) ke dalam persamaan (2.6), maka

diperoleh

$$\begin{aligned} \rho \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \rho g \beta (T - T_\infty) \sin \left( \frac{\bar{x}}{a} \right) \\ \rho \left[ \frac{w \nu Gr^{1/2}}{a} \frac{\partial}{\partial (xa)} \left( \frac{w \nu Gr^{1/2}}{a} \right) + \frac{v \nu Gr^{1/4}}{a} \frac{\partial}{\partial (ya Gr^{-1/4})} \left( \frac{w \nu Gr^{1/2}}{a} \right) \right] \\ &= \mu \frac{\partial^2}{\partial (ya Gr^{-1/4})^2} \left( \frac{w \nu Gr^{1/2}}{a} \right) + \rho g \beta (T - T_\infty) \sin x \\ \frac{\rho \nu^2 Gr}{a^3} \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] &= \frac{\mu \nu Gr}{a^3} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \beta (T - T_\infty) \sin x. \end{aligned}$$

Gantikan takrif nombor Grashof  $Gr = g\beta(T_w - T_\infty)a^3/\nu^2$  ke dalam persamaan di atas, diperoleh

$$\rho g \beta (T_w - T_\infty) \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{\mu g \beta}{\nu} (T_w - T_\infty) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \beta (T - T_\infty) \sin x.$$

Kemudian, bahagikan persamaan di atas dengan  $\rho g \beta (T_w - T_\infty)$ , maka didapati

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho \nu} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \theta \sin x.$$

Diketahui  $\mu = \nu \rho$ , maka

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \theta \sin x. \quad (2.13)$$

Persamaan (2.13) di atas adalah persamaan momentum dalam bentuk tak berdimensi. Kini, pertimbangkan untuk persamaan tenaga (2.7). Dengan menggantikan pemboleh ubah (2.10) dan (2.11), didapati

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}, \\ \left( \frac{w \nu Gr^{1/2}}{a} \right) \frac{\partial}{\partial (xa)} [\theta (T_w - T_\infty) + T_\infty] + \left( \frac{v \nu Gr^{1/2}}{a} \right) \frac{\partial}{\partial (ya Gr^{-1/4})} [\theta (T_w - T_\infty) + T_\infty] \\ &= \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2}{\partial (ya Gr^{-1/4})^2} [\theta (T_w - T_\infty) + T_\infty], \\ \left( \frac{w \nu Gr^{1/2}}{a^2} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial x} [\theta (T_w - T_\infty)] + \frac{\partial T_\infty}{\partial x} \right] + \left( \frac{v \nu Gr^{1/2}}{a^2} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial y} [\theta (T_w - T_\infty)] + \frac{\partial T_\infty}{\partial y} \right] \\ &= \frac{\nu}{Pr} \frac{Gr^{1/2}}{a^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\theta (T_w - T_\infty)] + \frac{\partial^2 T_\infty}{\partial y^2} \right], \\ \frac{\nu Gr^{1/2}}{a^2} (T_w - T_\infty) \left[ u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] &= \frac{\nu Gr^{1/2}}{a^2} (T_w - T_\infty) \left[ \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right], \\ u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Persamaan (2.14) adalah persamaan tenaga dalam bentuk tak berdimensi. Sekarang, syarat sempadan (2.8) dan (2.9) dalam bentuk tak berdimensi menjadi

$$u = v = 0, \quad \theta = 1, \quad \text{pada } y = 0, \quad (2.15)$$

$$u \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0 \quad \text{pada } y \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

## 2.4 Persamaan Terjelma

Kini, untuk menyelesaikan persamaan menakluk tak berdimensi (2.12) hingga (2.14) yang tertakluk kepada syarat sempadan (2.15) dan (2.16), melalui pengalaman dan kaedah cuba jaya, pemboleh ubah-pemboleh ubah berikut diperkenalkan (Nazar *et al.* 2002*b*);

$$\psi = xr(x)f(x, y), \quad \theta = \theta(x, y), \quad (2.17)$$

dengan  $\psi$  adalah fungsi strim yang ditakrifkan sebagai

$$u = (1/r)\partial\psi/\partial y,$$

$$v = -(1/r)\partial\psi/\partial x.$$

Dengan menggantikan pemboleh ubah (2.17) untuk persamaan keselantaran tak berdimensi (2.12), didapati

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(ru) + \frac{\partial}{\partial y}(rv) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Perhatikan bahawa persamaan (2.12) dipenuhi sepenuhnya. Sekarang, pertimbangkan pula persamaan momentum tak berdimensi (2.13). Sebelum menggantikan pemboleh ubah (2.17), kami perlu dapatkan

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial y} &= xr(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} &= xr(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \\ \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} &= xr(x)\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} &= xr(x)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + xr'(x)f(x, y) + r(x)f(x, y) \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = xr(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x, y) + xr'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + r(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Sekarang, gantikan persamaan-persamaan di atas ke dalam persamaan (2.13), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \theta \sin x, \\
\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \right] + \theta \sin x, \\
\frac{1}{r} \left(xr \frac{\partial f}{\partial y}\right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(-\frac{\cos x}{a \sin^2 x}\right)\right] &+ \left(-\frac{1}{r} \left[xr \frac{\partial f}{\partial x} + xr'f + rf\right] \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \theta \sin x, \\
\left(x \frac{\partial f}{\partial y}\right) \left[\frac{1}{r} \left(xr \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + xr' \frac{\partial f}{\partial y} + r \frac{\partial f}{\partial y}\right)\right] &+ \left(xr \frac{\partial f}{\partial y}\right) \left(-\frac{\cos x}{a \sin^2 x}\right) \\
+ \left(-x \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\cos x}{\sin x} f - f\right) \left(\frac{1}{r} \cdot xr \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) &= \frac{1}{r} \left(xr \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right) + \theta \sin x, \\
\left(x \frac{\partial f}{\partial y}\right) \left[\left(x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + x \frac{\cos x}{\sin x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)\right] &+ \left(x \frac{\partial f}{\partial y}\right) \left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right) \\
+ \left(-x \frac{\partial f}{\partial x} - x f \frac{\cos x}{\sin x} - f\right) \left(x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) &= x \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \theta \sin x, \\
x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + x \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{\cos x}{\sin x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 &- \frac{\cos x}{\sin x} x \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \\
-x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x f \frac{\cos x}{\sin x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \theta \frac{\sin x}{x}, \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \left(1 + \frac{x}{\sin x} \cos x\right) f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &- \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{\sin x}{x} \theta \\
&= x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right). \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Diperoleh persamaan (2.19) di atas adalah persamaan momentum terjelma. Kini, pertimbangkan persamaan tenaga dalam bentuk tak berdimensi (2.14), dan dengan penggantian yang sama seperti sebelum ini, didapati

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\
\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\
\left(x \frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(-x \frac{\partial f}{\partial x} - x f \frac{\cos x}{\sin x} - f\right) \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\
x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} - x f \frac{\cos x}{\sin x} \frac{\partial \theta}{\partial y} - f \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\
\frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{x}{\sin x} \cos x\right) f \frac{\partial \theta}{\partial y} &= x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) \quad (2.20)
\end{aligned}$$



## RUJUKAN

- Bejan, A. 1984. *Convection Heat Transfer*. Canada: John Wiley and Sons.
- Bhattacharyya, S. & Pop, I. 1996. Free convection from cylinders to elliptic cross-section in micropolar fluid. *International Journal of Engineering Science* **34**: 1301–1310.
- Burmeister, L. C. 1983. *Convection Heat Transfer*. Canada: John Wiley and Sons.
- Cebecci, T. & Smith, A. M. O. 1974. *Analysis of Turbulent Boundary Layers*. New York: Academic Press.
- Cebecci, T. & Bradshaw, P. 1977. *Momentum Transfer In Boundary Layers*. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
- Cebecci, T. & Bradshaw, P. 1988. *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer*. New York: Springer-Verlag.
- Chapman, A. J. 1984. *Heat Transfer*. 4th edn. New York: MacMillan.
- Chen, T. S. & Mocoglu, A. 1977. Analysis of mixed and free convection about a sphere. *International Journal of Heat Mass Transfer* **20**: 867-875.
- Chiang, T., Ossin, A. & Tien, C. L. 1964. Laminar free convection from a sphere. *ASME Journal of Heat Transfer* **86**: 537–542.
- Darus, A. N. 1995. *Fenomena Pemindahan Haba Suatu Pengenalan*. Kuala Lumpur: Dewan Bahasa dan Pustaka.
- Huang, M. J. & Chen, C. K. 1987. Laminar free convection from a sphere with blowing and suction. *ASME Journal of Heat Transfer* **109**: 529–532.
- Incropera, F. P. & Dewitt, D. P. 1985. *Introduction to Heat Transfer*. New York: John Wiley and Sons.
- Keller, H. B. & Cebeci, T. 1971. *Accurate Numerical Methods for Boundary Layer Flows, I: Two-Dimensional Laminar Flows*. New York: Springer-Verlag.
- Na, T. Y. 1979. *Computational Method in Engineering Boundary Value Problems*. New York: Academic-Press.

- Nazar, R. & Amin, N. 2001. Kaedah-kaedah penyelesaian bagi masalah lapisan sempadan olakan bebas. *Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik ke-9* hlm. 377–384.
- Nazar, R. & Amin, N. 2003. On the free convection boundary layer about a horizontal circular cylinder in a micropolar fluid. *Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik ke-11* hlm. 150–164.
- Nazar, R., Amin, N., Grosan, T. & Pop, I. 2002a. Free convection boundary layer on a sphere with constant surface heat flux in a micropolar fluid. *International Communication in Heat Mass Transfer* **29** (8): 1129–1138.
- Nazar, R., Amin, N., Grosan, T. & Pop, I. 2002b. Free convection boundary layer on an isothermal sphere in a micropolar fluid. *International Communication in Heat Mass Transfer* **29** (3): 377–386.
- Nazar, R., Amin, N. & Pop, I. 2003. Mixed convection boundary layer flow about an isothermal sphere in a micropolar fluid. *International Journal of Thermal Sciences* **42** (3): 283–293.
- Pop, I. & Ingham, B. 2001. *Convective Heat Transfer: Mathematical and Computational Modelling of Viscous Fluids and Porous Media*. Oxford: Pergamon.
- Rees, D. A. S. & Pop, I. 1998. Free convection boundary layer flow of a micropolar fluid from a vertical flat plate. *IMA Journal of Applied Mathematics* **61**: 179–197.
- Schlichting, H. 1979. *Boundary Layer Theory*. 7th edn. New York: McGraw-Hill Inc.
- Simonson, J. R. 1991. *Pemindahan Haba Kejuruteraan*. Skudai: Unit Penerbitan Akademik UTM.