

KETAKSTABILAN GELOMBANG PANJANG BAGI OLAKAN MANTAP
BENARD-MARANGONI DENGAN BATAS BAWAH BERTEBAT

FAZLINA BT AMAN

PROJEK PENYELIDIKAN YANG DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI
SEBAHAGIAN DARIPADA SYARAT MEMPEROLEH IJAZAH SARJANA
SAINS

PUSAT PENGAJIAN SAINS MATEMATIK
UNIVERSITI KEBANGSAAN MALAYSIA
BANGI

2003

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang tiap-tiap satunya telah saya jelaskan sumbernya.

10 Oktober 2003

Fazlina bt Aman
P23742



PTTA UTHM
PERPUSTAKAAN TUNKU TUN AMINAH

PENGHARGAAN

Alhamdulillah, bersyukur saya ke hadrat Ilahi kerana dengan izinNya dapat saya menyiapkan projek penyelidikan ini. Setinggi-tinggi penghargaan dan ucapan terima kasih khas ditujukan kepada Prof. Madya Dr. Ishak Hashim selaku penyelia saya yang telah banyak membantu dan membimbang saya dari awal hingga ke akhir penyiapan projek ini.

Terima kasih kepada semua pensyarah Pusat Pengajian Sains Matematik di atas ilmu yang telah diberikan. Terima kasih juga kepada KUiTTHO di atas pembelian pengajian saya di sini.

Sekalung penghargaan kepada kedua ibu bapa saya, Puan Maimon Abd. Karim dan Encik Aman bin Simin serta tunang saya yang banyak memberikan sokongan dan dorongan sepanjang saya berada di UKM.

Ucapan terima kasih juga saya tujukan kepada rakan-rakan yang banyak membantu dalam penyiapan projek ini seperti Wartono, Adyda, Raziana, Mea, Nazran dan Najib serta rakan-rakan lain yang banyak memberikan dorongan dan galakan.

Akhir kata, saya mengucapkan terima kasih kepada sesiapa yang terlibat sama ada secara langsung atau tidak langsung dalam menyempurnakan projek ini.

ABSTRAK

Permulaan olakan mantap Bénard-Marangoni dalam selapisan bendalir mengufuk dengan sempadan bawah yang bertebat dan tegar serta permukaan atasnya bebas tercangga dikaji secara analisis berdasarkan teori kestabilan linear klasik. Persamaan linear bagi model olakan diselesaikan dengan menggunakan kaedah usikan. Kami memperoleh ungkapan beranalisis bagi nombor tak berdimensi Rayleigh pada peringkat utama dan pada peringkat pertama. Penebatan lapisan bendalir di sempadan bawah mempengaruhi ketakstabilan gelombang panjang.



PTTA UTHM
PERPUSTAKAAN TUNKU TUN AMINAH

ABSTRACT

The onset of steady Bénard-Marangoni convection in a horizontal layer of fluid with rigid and insulating lower boundary and a deformable free upper surface is studied using analytical techniques by means of classical linear stability theory. The linear model equations are solved using a perturbation methods. We obtain an analytical expression for the non-dimensional Rayleigh number at leading and first orders. An insulating lower boundary influences the instability of a long wave.



KANDUNGAN

PENGAKUAN	ii
PENGHARGAAN	iii
ABSTRAK	iv
ABSTRACT	v
KANDUNGAN	vi
SENARAI JADUAL	viii
SENARAI RAJAH	ix
SENARAI SIMBOL	x
BAB I PENGENALAN	1
1.1 Olakan dan kepentingannya	1
1.2 Olakan haba dalam lapisan bendalir	2
1.2.1 Olakan berpunca daripada daya keapungan	2
1.2.2 Olakan berpunca daripada daya tegangan permukaan	3
1.3 Kajian eksperimen terdahulu	4
1.3.1 Eksperimen Bénard	4
1.3.2 Eksperimen Block	5
1.3.3 Kajian-kajian berkaitan	5
1.3.4 Kajian berkenaan olakan Bénard-Marangoni	6
BAB II MODEL MASALAH KESTABILAN	10
2.1 Pemodelan masalah linear	10
2.2 Persamaan menakluk	12
2.2.1 Persamaan keselarasan	12
2.2.2 Persamaan momentum	12
2.2.3 Persamaan tenaga	13
2.3 Pelinearan masalah	13
2.3.1 Persamaan momentum	14
2.3.2 Persamaan tenaga	14
2.4 Syarat-syarat sempadan	15
2.4.1 Pada $z = 0$	15
2.4.2 Pada $z = 1$	15
2.5 Analisis pada mod normal	19
2.5.1 Persamaan momentum	20
2.5.2 Persamaan tenaga	21
2.5.3 Syarat sempadan	21

BAB III KEPUTUSAN DAN PERBINCANGAN	24
3.1 Penyelesaian masalah kstabilan	24
3.2 Penyelesaian masalah terlinear	25
BAB IV KESIMPULAN DAN KAJIAN LANJUTAN	30
4.1 Kesimpulan	30
4.2 Kajian lanjutan	31
RUJUKAN	32



PTTA UTHM
PERPUSTAKAAN TUNKU TUN AMINAH

SENARAI JADUAL

2.1 Kuantiti-kuantiti tak berdimensi.	20
3.1 Nilai pengiraan secara beranalisis bagi R_0 daripada persamaan (3.25) untuk beberapa nilai P, G	27
3.2 Nilai pengiraan secara beranalisis bagi R_1 daripada persamaan (3.39) untuk beberapa nilai Γ dan B_i	29



PTTA UTHM
PERPUSTAKAAN TUNKU TUN AMINAH

SENARAI RAJAH

1.1	Lakaran bagi pergerakan sel hasil daripada daya keapungan.	3
1.2	Mekanisma asas bagi olakan termokapilari tanpa canggaan permukaan.	4
2.1	Model fizikal.	11



PTTA UTHM
PERPUSTAKAAN TUNKU TUN AMINAH

SENARAI SIMBOL

a	nombor gelombang
B_i	nombor Biot
B_o	nombor Bond
C_r	nombor Crispation
d	ketebalan bendalir
f	pemesongan pada permukaan atas bendalir
g	pecutan graviti
G	nombor Galileo
h	pekali pemindahan haba
k	nombor gelombang mengufuk
M	nombor Marangoni
P_r	nombor Prandtl
p	tekanan
p_a	tekanan malar
R	nombor Rayleigh
s	kadar pertumbuhan berkaitan dengan masa
t	masa
$T(z)$	variasi suhu usikan menegak
T_r	taburan suhu
T_H	suhu pada permukaan bawah
T_C	suhu pada permukaan atas
T_∞	suhu malar
\mathbf{u}	halaju bendalir
w	komponen- z bagi halaju
$W(z)$	variasi halaju usikan menegak
x, y, z	ruang koordinat kartesan

Simbol Greek

- β kecerunan suhu
- γ pekali variasi pengembangan terma
- κ resapan terma bendalir
- ν kelikatan kinematik bendalir
- ρ ketumpatan bendalir
- ρ_0 nilai ketumpatan bendalir pada suhu rujukan
- τ ketegangan permukaan
- τ_0 ketegangan permukaan pada suhu rujukan yang sesuai
- δ canggaan permukaan
- α pekali kembangan isipadu
- θ magnitud gangguan bagi suhu
- μ kelikatan bendalir
- χ konduktif terma bendalir

Subskrip

- c keadaan kritikal
- o kuantiti rujukan



BAB I

PENGENALAN

1.1 Olakan dan kepentingannya

Olakan merupakan suatu fenomena yang penting dalam kehidupan sehari-hari. Perhatikan wap yang kelihatan daripada makanan yang baru sahaja dimasak, pembentukan awan dan juga arus aliran udara di atas permukaan jalan yang kelihatan berbahaya apabila cuaca panas, merupakan contoh-contoh bagi olakan yang sering berlaku tanpa kita sedari. Menurut Velarde & Normand (1980), dalam bidang meteorologi, olakan dirujuk sebagai pergerakan atmosfera pada arah menegak. Dalam bidang industri komersial pula, olakan dalam bendalir diaplikasikan dalam pertumbuhan kristal dan kimpalan keluli. Sementara itu, terdapat juga olakan yang sukar diperhatikan seperti olakan yang berlaku dalam mantel bumi iaitu migrasi perlahan kontinen-kontinen.

Penerangan yang paling mudah bagi olakan yang diberikan oleh Velarde & Normand (1980) ialah kenaikan haba. Sementara kes yang termudah bagi olakan adalah apabila suatu bendalir (sama ada gas atau cecair) dipanaskan daripada bawah. Tindak balas bagi pemanasan ini akan menyebabkan bendalir tersebut mengembang dan menjadi kurang tumpat. Maka lapisan bawah yang panas dan lebih ringan akan cenderung untuk naik ke atas, manakala lapisan atas yang lebih sejuk akan tertolak ke bawah. Olakan ini telah lama diketahui sejak kurun ke-18.

Secara amnya, menurut Koschmieder (1993) olakan ialah pergerakan bendalir yang disebabkan oleh perbezaan suhu dengan kecerunan suhu pada mana-mana arah. Terdapat dua jenis olakan iaitu olakan bebas atau semula jadi dan olakan paksa. Olakan bebas adalah pergerakan bendalir yang disebabkan oleh medan daya luaran seperti graviti yang bertindak ke atas kecerunan ketumpatan yang dirangsang oleh proses pemindahan haba itu sendiri. Sementara olakan paksa ialah pergerakan bendalir yang dirangsang oleh faktor luaran seperti pengepam atau kipas.

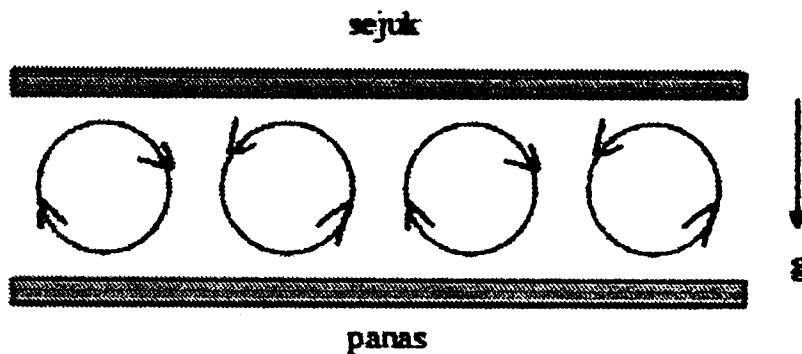
1.2 Olakan haba dalam lapisan bendalir

Olakan dalam lapisan bendalir yang dipanaskan daripada bawah dan tertakluk kepada kecerunan suhu menegak yang seragam, dihasilkan oleh dua jenis mekanisma yang berbeza iaitu daya keapungan dan daya tegangan permukaan.

1.2.1 Olakan berpunca daripada daya keapungan

Olakan yang terhasil daripada daya keapungan dikenali juga sebagai olakan Bénard. Mekanisma bagi olakan ini adalah seperti berikut: Pertimbangkan suatu lapisan bendalir likat mengufuk pada keadaan rehat yang dibatasi oleh dua plat konduktor haba dan dipanaskan dari bawah (atau disejukkan dari atas). Andaikan terdapat suatu usikan kecil dalam suhu yang menghasilkan satu titik panas berdekatan plat bawah.

Pada kebiasaannya, bendalir mempunyai pekali kembangan haba yang positif. Maka elemen bendalir yang lebih panas akan mengembang secara relatif terhadap bendalir berdekatannya. Didapati perbezaan tekanan di antara elemen bendalir di bawah dan di atas melebihi beratnya, lalu menyebabkan ia bergerak ke atas disebabkan oleh daya keapungan. Bendalir dari bawah akan mengisi kekosongan yang ditinggalkan oleh bendalir yang bergerak ke atas tadi. Seterusnya, bendalir yang bergerak ke atas tadi akan menyejuk dan akhirnya bergerak semula ke bawah



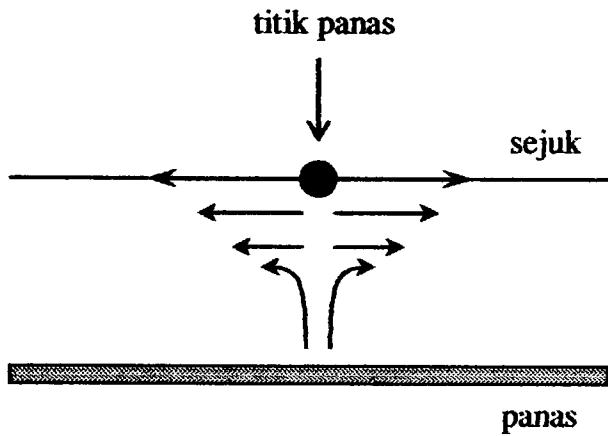
RAJAH 1.1 Lakaran bagi pergerakan sel hasil daripada daya keapungan.

seperti yang digambarkan dalam Rajah 1.1. Proses olakan akan berterusan selagi suhu di antara permukaan bawah dan permukaan atas adalah cukup besar.

1.2.2 Olakan berpunca daripada daya tegangan permukaan

Olakan boleh juga berlaku disebabkan oleh daya tegangan permukaan atau daya terinokapilari seperti mana olakan terhasil daripada daya keapungan. Olakan ini dikenali juga sebagai olakan Marangoni. Menurut Velarde & Normand (1980) tegangan permukaan adalah daya padu yang kesannya ialah untuk meminimumkan kawasan permukaan bendalir. Selain itu, tekanan permukaan juga bertindak sebagai daya dorongan dalam aliran olakan kerana tegangan berubah-ubah mengikut suhu. Seperti ketumpatan, Velarde & Normand (1980) mendapati tegangan permukaan akan berkurang apabila suhu bertambah. Andaikan suatu titik panas telah bergerak ke permukaan disebabkan oleh ketakseragaman suhu. Penghasilan kecerunan daya tegangan permukaan akan mendorong bendalir bergerak dari kawasan panas (daya tegangan permukaan yang rendah) ke kawasan sejuk (daya tegangan permukaan yang tinggi) seperti yang digambarkan dalam Rajah 1.2.

Oleh itu, sebarang perubahan suhu yang terhasil merentasi permukaan bendalir akan disertai oleh perubahan dalam tegangan permukaan. Kawasan yang lebih sejuk akan mempamerkan tegangan permukaan yang tinggi, manakala pada kawasan yang lebih panas, tegangan akan berkurangan. Jika perubahan tegangan permukaan membawa kepada ketakseimbangan daya, maka suatu aliran akan ter-



RAJAH 1.2 Mekanisma asas bagi olakan termokapilari tanpa canggaan permukaan.

hasil. Oleh itu, olakan termokapilari adalah berpunca daripada kecerunan suhu pada permukaan bebas bendalir yang disebabkan oleh kebersandaran daya tegangan permukaan terhadap suhu.

1.3 Kajian eksperimen terdahulu

1.3.1 Eksperimen Bénard

Masalah bagi permulaan ketakstabilan olakan dalam lapisan bendalir mengufuk yang dipanaskan dari bawah adalah berpunca dari pemerhatian secara eksperimen oleh Bénard. Menurut Koschmieder (1993), eksperimen yang dijalankan oleh Bénard melibatkan lapisan bendalir yang sangat tipis iaitu lebih kurang satu milimeter dalamnya. Permukaan atas adalah bebas dan mempunyai suhu yang lebih rendah berbanding suhu pada permukaan bawah kerana penyejukan oleh udara yang tidak seragam. Beberapa jenis cecair dengan kelikatan yang berbeza telah digunakan. Bénard mendapati dalam kesemua kes, apabila suhu permukaan bawah meningkat, lapisan bendalir mengalami retikulasi dan terbahagi kepada sel-sel berbentuk heksagon yang stabil dan tetap. Sementara itu, Bénard percaya bahawa agen yang menyebabkan ketakstabilan berlaku adalah hasil daripada daya keapungan oleh pengembangan bendalir yang dipanaskan itu. Walau bagaimanapun, kajian oleh Block (1956), Pearson (1958) dan Nield (1964) menunjukkan ba-

hawa selain daripada daya keapungan, sel-sel Bénard sebenarnya lebih dirangsang oleh kecerunan daya tegangan permukaan yang terhasil daripada variasi suhu yang merentasi permukaan bebas.

1.3.2 Eksperimen Block

Pada tahun 1956, Block telah menjalankan eksperimen bagi mengenalpasti punca bagi pembentukan sel-sel heksagon dalam eksperimen Bénard. Pemerhatian Block (1956) menunjukkan bahawa apabila lapisan tipis yang mengalami olakan dilitupi oleh lapisan tipis silikon yang merebak, didapati aliran dalam bendalir akan terhenti. Beliau menyimpulkan fenomena ini disebabkan oleh kesan termokapilar atau daya tegangan permukaan pada permukaan atas yang bebas dan bukannya daya keapungan.

1.3.3 Kajian-kajian berkaitan

Ahli teori terunggul berkenaan olakan pada awal kurun ke-20 sebenarnya ialah Lord Rayleigh. Antara kertas kerjanya yang terakhir ialah artikel mengenai olakan yang diterbitkan pada tahun 1916 yang cuba menghuraikan hasil eksperimen Bénard. Walaupun kini telah diketahui bahawa teori Rayleigh tidak boleh diaplikasikan kepada sistem yang dikaji oleh Bénard, namun kertas kerjanya telah menjadi titik permulaan bagi hampir semua teori moden olakan. Pearson (1958) telah memperkenalkan teori yang lebih tepat bagi olakan yang diperhatikan oleh Bénard iaitu ia disebabkan oleh daya tegangan permukaan. Beliau menunjukkan bahawa daya termokapilar pada permukaan bebas yang disebabkan oleh variasi bagi tegangan permukaan dan suhu menyebabkan olakan mantap (Marangoni) berlaku dalam lapisan bendalir yang dipanaskan dari bawah dengan nombor Marangoni, M yang melebihi nilai kritikal.

1.3.4 Kajian berkenaan olakan Bénard-Marangoni

Dalam kebanyakan situasi fizikal, olakan sebenarnya berlaku disebabkan oleh gabungan daya keapungan dan daya tegangan permukaan. Sehubungan dengan itu, Nield (1964) telah meneruskan kajian yang dibuat oleh Pearson (1958) dengan memasukkan kesan daya keapungan. Beliau mengkaji permulaan olakan mantap Bénard-Marangoni pada suatu lapisan bendalir mengufuk tanpa melibatkan canggaan permukaan bebas yang dipanaskan dari bawah dan tertakluk kepada kecerunan suhu mencancang. Nield (1964) mendapati bahawa kedua-dua mekanisma ketakstabilan saling meneguhkan di antara satu sama lain. Beliau menunjukkan bahawa gabungan antara kedua-dua mekanisma ketakstabilan itu adalah kuat apabila nombor Biot iaitu $B_i = 0$, tetapi lemah apabila B_i meningkat.

Seterusnya, setelah melakukan kajian berangka secara intensif, Takashima (1970) menyimpulkan bahawa adalah mustahil olakan Bénard-Marangoni berayun berlaku dalam lapisan bendalir yang dipanaskan dari bawah dengan permukaan bebas tanpa canggaan. Davis & Homsy (1980) pula meneruskan kajian olch Nield (1964) dengan memasukkan kesan percanggaan permukaan bebas. Kajian Davis & Homsy (1980) ini mengkhusus kepada kajian bagi permulaan olakan Bénard-Marangoni bagi had $C_r \rightarrow 0$ dengan mendapatkan penyelesaian bagi R_c , M_c dan a_c sebagai siri asimptotik biasa dalam kuasa $C_r \ll 1$ seperti berikut,

$$R_c = R_0 + R_1 C_r + O(C_r^2),$$

$$M_c = M_0 + M_1 C_r + O(C_r^2),$$

$$a_c = a_0 + a_1 C_r + O(C_r^2),$$

dengan C_r , R_c , M_c dan a_c masing-masing adalah nombor Crispation, nombor Rayleigh kritikal, nombor Marangoni kritikal dan nombor gelombang kritikal. Ungkapan yang diperolchi olch Davis & Homsy (1980) merupakan penyelesaian bagi masalah tersebut apabila $C_r = 0$, yang sebenarnya telah diperolehi oleh Nield (1964) sebelum ini.

Pengiraan bagi ungkapan peringkat utama yang dilakukan oleh Davis &

Homsy (1980) adalah dalam kembangan R_c untuk suatu julat nilai M bagi kes nombor Bond iaitu $B_o = 0$ dan $B_i = 0$. Nilai-nilai ini kemudiannya disemak dan diperbetulkan oleh Wilson (1993) yang mana nilai pengiraan berangka bagi R_1 oleh Wilson (1993) adalah fungsi bagi M bagi kes $B_o = 0$ dan $B_i = 0$.

Nombor Rayleigh R dan nombor Marangoni M bagi semua kajian terdahulu yang menghuraikan kesan daya keapungan dan daya tegangan permukaan diambil sebagai saling tak bersandar. Walau bagaimanapun, dalam eksperimen fizikal yang biasa, parameter kawalan adalah perbezaan suhu yang merentasi lapisan yang wujud secara linear dalam kedua-dua R dan M . Oleh itu, kajian terkini lebih memfokus kepada kes pasangan fizikal yang berkaitan yang mana hubungan di antara R dan M adalah $M = \Gamma R$ dengan $\Gamma = \gamma/\rho_0 g \alpha d^2$ merupakan suatu pemalar.

Seterusnya, Benguria & Depassier (1989) mengkaji permulaan olakan Bénard-Marangoni secara berangka dalam lapisan planar yang dipanaskan dari bawah bagi kes $C_r = \infty$ (tercangga dengan kuat), $P_r = 1$, $B_i = 0$ dan $B_o = GP_r C_r$ dengan G dan P_r masing-masing ialah nombor Galileo dan nombor Prandtl. Benguria dan Depassier (1989) merupakan pengkaji pertama yang menunjukkan olakan berayun boleh berlaku apabila $\Gamma > 0$ jika termokapilari adalah kuat dan permukaan bebas tercangga. Pada masa yang sama, Perez-Garcia & Carneiro (1991) turut mempertimbangkan masalah olakan Bénard-Marangoni secara berangka bagi kes $P_r = 1$, $B_0 = 0.1$ dan $B_i = 0$. Perez-Garcia & Carneiro (1991) memperoleh keadaan di mana persaingan diantara olakan mantap dan berayun, dan antara dua mod berayun boleh berlaku apabila $\Gamma < 0$.

Dalam kajian-kajian terkini, kesan-kesan fizikal yang lain telah dimasukkan di dalam kajian tentang permulaan olakan dalam lapisan planar mengufuk. Sebagai contoh, penjelasan tepat secara beranalisis bagi M untuk permulaan olakan mantap Marangoni dengan kelikatan suhu bersandar telah diperolehi oleh Kozhoukharova *et al.* (1995). Sementara itu, Selak & Lebon (1995) telah mengkaji permulaan olakan mantap Bénard-Marangoni dengan kehadiran kelikatan yang berubah terhadap suhu. Berikutnya, Char & Chiang (1994) mengkaji kesan pen-

janaan haba dalaman yang seragam pada permulaan olakan mantap Bénard-Marangoni. Terkini, Wilson (1997) telah memperolehi penjelasan yang tepat secara beranalisis untuk M bagi permulaan olakan mantap Marangoni dengan kehadiran pemanasan dalaman. Char & Chiang (1994) pula mendapati kesan menambahkan penjanaan haba dalaman adalah untuk mentakstabilkan lapisan. Antara kajian terkini berkenaan olakan Bénard-Marangoni ialah oleh Hashim & Wilson (1999) yang buat pertama kalinya telah menghuraikan secara lengkap lengkung sut kestabilan bagi kedua-dua olakan mantap dan olakan berayun dengan menggunakan kaedah berangka dan beranalisis.

Kajian berkenaan penebatan lapisan bendalir telah dilakukan oleh Gouesbet *et al.* (1990). Beliau mengkaji mod tak stabil dan perubahan kestabilan bagi ketakstabilan hasil dari tegangan permukaan dan keapungan pada suatu lapisan bendalir mengufuk untuk kes permukaan bebas bertebat dan untuk kes permukaan bebas berkonduksi. Kesan yang dapat dilihat dalam kes penebatan ialah hilangnya garis-garis tak berkesinambungan pada graf mod tak stabil untuk nombor Rayleigh pada nombor gelombang kritikal, a_c . Gouesbet *et al.* (1990) mendapati keapungan menghalang daripada berlakunya mod tak stabil, manakala permulaan bagi mod tak stabil akan membawa kepada pergerakan berayun. Clever & Busse (1995) pula mengkaji olakan mantap yang berputar dan ketakstabilan olakan dalam lapisan bendalir yang dipanaskan dari bawah untuk kes sempadan bawah yang tegar dan berkonduksi tinggi manakala permukaan atas adalah bebas dan hampir bertebat. Clever & Busse (1995) mendapati terdapat ketakstabilan baru iaitu ketakstabilan varicose subharmonik yang dihadkan pada kawasan berputar yang stabil terhadap nombor Rayleigh tinggi dalam kes nombor Prandtl sederhana. Clever & Busse (1995) berpendapat kombinasi sempadan bawah yang tegar dan bertebat, dan sempadan atas bebas tegangan atau tegar dan berkonduksi sempurna sepertinya menghasilkan keputusan yang sama. Selain itu, Priede & Gunter (1997) mengkaji kesan penebatan sempadan bawah bagi kestabilan olakan termokapilari pada nombor Prandtl rendah. Beliau mendapati untuk kes batas bawah yang bertebat, nombor gelombang kritikal berskala $a_c \sim P_r^{1/2}$ yang membawa maksud

RUJUKAN

- Anderson, J. D. J. 1995. *Computational fluid dynamics: the basics with application.* McGraw-hill, New York.
- Benguria, R. D. & Depassier, M. C. 1989. On the linear stability theory of Bénard-Marangoni convection. *Phys. Fluids* **30**: 1123–1127.
- Block, M. J. 1956. Surface tension as the cause of Benard cells and surface deformation in a liquid film. *Nature* **178**: 34.
- Char, M. I. & Chiang, K. T. 1994. Stability analysis of Bénard-Marangoni convection in fluids with internal heat generation. *J. Phys. D: Appl. Phys.* **27**: 748–755.
- Clever, R. M. & Busse, F. H. 1995. Convection rolls and their instabilities in the presence of a nearly insulating upper boundary. *Phys. Fluids* **7** (1): 92–97.
- Davis, S. H. & Homsy, G. M. 1980. Energy stability for free surface problems: Buoyancy-thermocapillary layers. *J. Fluid Mech.* **98** (3): 527–553.
- Gouesbet, G., Maquet, J., Roze, C. & Darrigo, R. 1990. Surface-tension- and coupled buoyancy-driven instability in a horizontal liquid layer. overstability and exchange of stability. *Phys. Fluids* **2** (6): 903–911.
- Hashim, I. 1998. Theoretical analysis of the onset of Bénard-Marangoni convection. Thesis ph.d, University of Strathclyde.
- Hashim, I. & Wilson, S. K. 1999. The effect of uniform vertical magnetic field on the onset of steady Marangoni convection in horizontal layer of conducting fluid. *Int. J. Heat Mass Transfer* **42**: 525–533.
- Koschmieder, E. L. 1993. *Bénard cells and Taylor vortices.* Cambridge: Cambridge University Press.
- Kozhoukharova, Z., Roze, C. & Lebon, G. 1995. Surface-tension instability in a fluid layer with variable viscosity and deformable upper surface. *Microgravity Sci. Tech.* **4**: 249–255.

- Nield, D. A. 1964. Surface tension and buoyancy effects in cellular convection. *J. Fluid Mech.* **19**: 341–352.
- Norihan, M. A. & Hashim, I. 2003. Growth rates of Bénard-Marangoni convection in a fluid layer in the presence of a magnetic field. *School of Mathematical Sciences, UKM*.
- Pearson, J. R. A. 1958. On convection cells induced by surface tension. *J. Fluid Mech.* **4**: 489–500.
- Perez-Garcia, C. & Carneiro, G. 1991. Linear stability analysis of Bénard-Marangoni convection in fluids with a deformable free surface. *Phys. Fluids A* **3** (2): 292–298.
- Priede, J. W. & Gunter, G. 1997. Influence of thermal boundary conditions on the stability of therinocapillary-driven convection at low prandtl numbers. *Phys. Fluids* **9** (6): 1621–1633.
- Selak, R. & Lebon, G. 1995. Bénard-Marangoni thermoconvection instability in presence of a temperature-dependent viscosity. *J. Phys. II France* **3**: 1185–1199.
- Takashima, M. 1970. Nature of the neutral state in convective instability induced by surface tension and buoyancy. *J. Phys. Soc. Japan* **28** (4): 810.
- Velarde, M. G. & Normand, C. 1980. Convection. *Scientific American* **243**: 79–93.
- Wilson, S. K. 1993. The effect of a uniform magnetic field on the onset of steady Bénard-Marangoni convection in a layer of conducting fluid. *J. Engng Math.* **27**: 161–188.
- Wilson, S. K. 1997. The effect of a uniform internal heat generation on the onset of steady marangoni convection in a horizontal layer of fluid. *Acta Mechanica* **124**: 63–78.